代数学 I 第 2 回復習レポート課題解答例

担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)*

問題 1

整数 $\mathbb{Z}$ に以下の二項演算を考えたものが群となるかどうかを判定せよ．

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ (m,n) \mapsto \min\{m,n\}$$

ただし，$\min\{m,n\}$ は m と n の小さいほう (同じだったらどちらでも良い) を取るという意味である．(例．$\min\{2,3\}=2$．$\min\{5,5\}=5$．)

問題 1 解答例. 群とならない □

問題 1 補足解説. 与えられた二項演算が定義 1.2(群の定義) に述べた 3 性質 (I), (II), (III) を満たすかどうかをチェックすれば良い．すると，本問の演算に関しては (II) の単位元の存在が満たされないことがわかる．実際，$e \in \mathbb{Z}$ が単位元であるとすると，任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対して，

$$\min\{e,n\} = n \tag{$*$}$$

を満たすが，$e < N$ となる $N \in \mathbb{Z}$ をとれば，

$$\min\{e,N\} = e \neq N$$

であるため，これは $(*)$ に矛盾する．

なお，本問の演算は (I) の結合法則は満たす．実際，任意の $n_1,n_2,n_3 \in \mathbb{Z}$ に対して，

$$\min\{\min\{n_1,n_2\},n_3\} = \min\{n_1,n_2,n_3\} = \min\{n_1,\min\{n_2,n_3\}\}$$

となる． □

問題 2

乗法群 $\mathbb{C}^\times$ の以下の部分集合 H が $\mathbb{C}^\times$ の部分群となるかどうかを判定せよ．

$$H = \{z \in \mathbb{C}^\times \mid |z| \in \mathbb{R}_{>0}\}.$$

ここで，複素数 $z = x+yi \in \mathbb{C}$ $(x,y \in \mathbb{R})$ に対し，$|z|$ は z の絶対値 $\sqrt{x^2+y^2}$ を表す．

問題 2 解答例. 部分群となる □

注意．任意の $z \in \mathbb{C}^\times$ に対して $|z| \in \mathbb{R}_{>0}$ は成立するので，本問は $H = \mathbb{C}^\times$ となる少し変な問題であった．私の本来の出題の意図としては，

$$H' = \{z \in \mathbb{C}^\times \mid |z| \in \mathbb{Q}_{>0}\}.$$

などとするのが良かったように思われる．しかし，一般に群 G 自身も群 G の部分群であると考えるので，本問の H でも解答に特に影響はない．ということで，本問の場合 $H = \mathbb{C}^\times$ であることから H が $\mathbb{C}^\times$ の部分群であることは直ちにわかるのであるが，以下の補足解説では H' の場合でも通用するような解説を行う．

* *e-mail*：hoya@shibaura-it.ac.jp

問題 2 補足解説. 命題 1.5 より，群 G の部分集合 H が G の部分群であることの必要十分条件は,

H が空でなく，任意の $h,k \in H$ に対し，$h \cdot k \in H$ かつ $h^{-1} \in H$ となること

であった．このため，部分群であることを確かめるときはこの条件を確認すればよい．

本問の場合，まず $1 \in H$ なので，$H \neq \varnothing$ である．次に，任意の $w,z \in H$ に対して，H の定義より $|w|,|z| \in \mathbb{R}_{>0}$ であるから,

$$|wz| = |w||z| \in \mathbb{R}_{>0}.$$

よって，$wz \in H$ である．さらにこのとき,

$$|w^{-1}| = \left|\frac{1}{w}\right| = \frac{1}{|w|} \in \mathbb{R}_{>0}$$

であるから，$w^{-1} \in H$ も成立する．以上より，H は $\mathbb{C}^\times$ の部分群である． □

問題 3

乗法群 $\mathbb{C}^\times$ の以下の部分集合 H が $\mathbb{C}^\times$ の部分群となるかどうかを判定せよ．

$$H = \{1, e^{\frac{2\pi}{5}i}, e^{-\frac{2\pi}{5}i}\}.$$

問題 3 解答例. 部分群とならない □

問題 3 補足解説. 考える方針は問題 2 補足解説に述べたものと同様である．

本問の H については，$e^{\frac{2\pi}{5}i} \in H$ であるが,

$$e^{\frac{2\pi}{5}i} \cdot e^{\frac{2\pi}{5}i} = e^{\frac{4\pi}{5}i} \notin H$$

なので，二項演算で閉じておらず，部分群とならない．問題 2 補足解説に述べた「任意の $h,k \in H$ に対し，$h \cdot k \in H$」という条件においては，h と k が異なっているという条件は入っていないので，$h = k$ の場合も考えないといけないということに注意しよう．

なお,

$$1^{-1} = 1 \in H, \quad (e^{\frac{2\pi}{5}i})^{-1} = e^{-\frac{2\pi}{5}i} \in H, \quad (e^{-\frac{2\pi}{5}i})^{-1} = e^{\frac{2\pi}{5}i} \in H$$

なので，本問の H は逆元をとる操作では閉じている． □

問題 4

一般線型群

$$GL_2(\mathbb{C}) \coloneqq \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a,b,c,d \in \mathbb{C}, ad - bc \neq 0 \right\}$$

を考える．以下の $GL_2(\mathbb{C})$ の部分集合 H が $GL_2(\mathbb{C})$ の部分群となるかどうかを判定せよ．

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{C}) \;\middle|\; bc = 0 \right\}.$$

問題 4 解答例. 部分群とならない □

問題 4 補足解説. 考える方針は問題 2 補足解説に述べたものと同様である．

本問の H については，$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in H$ であるが,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

となり，これは $1 \cdot 1 \neq 0$ より，H の元ではない．よって，H は二項演算で閉じておらず，部分群とならない．

なお，$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{C})$ に対し，

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

なので，$bc = 0$ であれば $(-b)(-c) = 0$ も成り立つから，本問の H は逆元をとる操作では閉じている．

$bc = 0$ は「$b = 0$ または $c = 0$」と同値なので，H は正則な上三角行列全体のなす集合 B_+ と正則な下三角行列全体のなす集合 B_- の和集合 $B_+ \cup B_-$ である．実は，B_+ や B_- 自体は $GL_2(\mathbb{C})$ の部分群となる．是非各自で確認してみてほしい． □

問題 5

一般線型群

$$GL_2(\mathbb{C}) \coloneqq \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a, b, c, d \in \mathbb{C}, ad - bc \neq 0 \right\}$$

を考える．以下の $GL_2(\mathbb{C})$ の部分集合 H が $GL_2(\mathbb{C})$ の部分群となるかどうかを判定せよ．

$$H = \left\{ A \in GL_2(\mathbb{C}) \ \middle| \ {}^t\!AA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

ここで，${}^t\!A$ は A の転置行列を表す.

問題 5 解答例. 部分群となる □

問題 5 補足解説. 考える方針は問題 2 補足解説に述べたものと同様である．

まず, 単位行列 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ は ${}^t\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ を満たすので, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in H$ であるため, $H \neq \varnothing$ である．次に，任意の $A, B \in H$ に対し，転置の性質と仮定から，

$${}^t(AB)(AB) = {}^tB\,{}^t\!AAB = {}^tB\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}B = {}^tBB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

よって，$AB \in H$．さらに，${}^t\!AA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ なので，${}^t\!A = A^{-1}$ であるから，

$${}^t(A^{-1})A^{-1} = {}^t(A^{-1})\,{}^t\!A = {}^t(AA^{-1}) = {}^t\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

よって，$A^{-1} \in H$．以上より，H は $GL_2(\mathbb{C})$ の部分群である．

なお，この証明においては，行列のサイズが 2×2 であることはあまり本質的ではない．実際，n 次正方行列の設定で,

$$O_n(\mathbb{K}) \coloneqq \{A \in GL_n(\mathbb{K}) \mid {}^t\!AA = I_n\}$$

とすると，全く同じ証明でこれは $GL_n(\mathbb{K})$ の部分群となることがわかる ($\mathbb{K}$ は $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ 又は $\mathbb{C}$)．これは，**直交群 (orthogonal group)** と呼ばれる．直交群の元が**直交行列**と呼ばれたこともあわせて思い出そう．この記号を使えば，本問の H は $O_2(\mathbb{C})$ である．

直交行列 A の行列式は

$$\det(A)^2 = \det({}^t\!AA) = \det(I_n) = 1$$

となるので ± 1 であるが，このうち $+1$ の方をとって，

$$SO_n(\mathbb{K}) \coloneqq \{A \in GL_n(\mathbb{K}) \mid {}^t\!AA = I_n, \det(A) = 1\}$$

としたものはまた $GL_n(\mathbb{K}), O_n(\mathbb{K})$ の部分群となる[*1]．これを**特殊直交群 (special orthogonal group)** と呼ぶ．例えば，

$$SO_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \;\middle|\; \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

である．

線形代数の復習 (本講義の範囲では証明無しに用いてよい)

- 行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ に対し，(i,j) 成分を a_{ji} としたものを，

$$ {}^tA = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

と書き，A の**転置行列**という．$\ell \times m$ 行列 A，$m \times n$ 行列 B に対し，

$${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$$

となる．また，n 次正則行列 A に対し，${}^t(A^{-1}) = ({}^tA)^{-1}$ である．

- n を正の整数とする．n 次正方行列 A に対して，$\det(A)$ を A の行列式とする．このとき，n 次正方行列 A, B に対し，

$$\det(AB) = \det(A)\det(B) \qquad \det({}^tA) = \det(A)$$

である．特に，$\det(A) \neq 0$ のとき，A^{-1} が存在して，$\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$ である．

- (2×2 行列の逆行列の一般形) 行列式 $ad - bc$ が 0 でない 2×2 行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対し，その逆行列は

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

である．

□

[*1] $\det(A) = -1$ のものだけを集めたものは部分群ではない．例えば単位元 I_n が入っていない．