代数学 I 第 4 回復習レポート課題解答例

担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)*

問題 1

$\mathfrak{S}_4$ の以下の部分集合 H が $\mathfrak{S}_4$ の部分群となるかどうかを判定せよ．

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \right\}$$

問題 1 解答例. 部分群とならない □

問題 1 補足解説.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \notin H$$

となるので H は二項演算で閉じておらず，部分群でない． □

群 G の部分集合 H が G の部分群であることの必要十分条件は，第 1,2 回講義資料命題 1.5 より，

『H が空でなく，任意の $h, k \in H$ に対し，$h \cdot k \in H$ かつ $h^{-1} \in H$ となること』

であった．部分群であるかどうかの判定についてはこの条件を確認すれば良い．「任意の $h, k \in H$ に対し，$h \cdot k \in H$」という条件においては，h と k が異なっているという条件は入っていないので，$h = k$ の場合 (つまり，h^2) も考えないといけないということに注意しよう．

なお，

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \in H,$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in H,$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \in H$$

なので，本問の H は逆元をとる操作では閉じている． □

問題 2

$\mathfrak{S}_4$ において，

$$s_1 = (1\ 2),\ s_2 = (2\ 3),\ s_3 = (3\ 4)$$

とする．このとき，

$$s_2 s_1 s_2 s_3 s_2 s_1 s_2 s_2 s_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \boxed{\text{ア}} & \boxed{\text{イ}} & \boxed{\text{ウ}} & \boxed{\text{エ}} \end{pmatrix}$$

である．$\boxed{\text{ア}}$〜$\boxed{\text{エ}}$に入る自然数を順にコンマで区切って半角数字で入力せよ (例:1,2,3,4).

問題 2 解答例. 4,3,1,2 □

* *e-mail*：hoya@shibaura-it.ac.jp

問題 2 補足解説. 本問のようにたくさんの巡回置換 (互換) の合成の結果を考える場合，各巡回置換を全て 2 行配列の形に直して計算するというのは書く量が非常に多くなるためお勧めしない．対称群 $\mathfrak{S}_n$ の各元が全単射写像 $\{1,\ldots,n\} \to \{1,\ldots,n\}$ であったということを思い出し，巡回置換の合成によって $1,\ldots,n$ のそれぞれがどこに送られるかというのを追いかけるのが良いと思われる．例えば，本問の場合以下のように計算を行う．

$$1 \overset{s_3}{\mapsto} 1 \overset{s_2}{\mapsto} 1 \overset{s_2}{\mapsto} 1 \overset{s_1}{\mapsto} 2 \overset{s_2}{\mapsto} 3 \overset{s_3}{\mapsto} 4 \overset{s_2}{\mapsto} 4 \overset{s_1}{\mapsto} 4 \overset{s_2}{\mapsto} 4$$
$$2 \overset{s_3}{\mapsto} 2 \overset{s_2}{\mapsto} 3 \overset{s_2}{\mapsto} 2 \overset{s_1}{\mapsto} 1 \overset{s_2}{\mapsto} 1 \overset{s_3}{\mapsto} 1 \overset{s_2}{\mapsto} 1 \overset{s_1}{\mapsto} 2 \overset{s_2}{\mapsto} 3$$
$$3 \overset{s_3}{\mapsto} 4 \overset{s_2}{\mapsto} 4 \overset{s_2}{\mapsto} 4 \overset{s_1}{\mapsto} 4 \overset{s_2}{\mapsto} 4 \overset{s_3}{\mapsto} 3 \overset{s_2}{\mapsto} 2 \overset{s_1}{\mapsto} 1 \overset{s_2}{\mapsto} 1$$
$$4 \overset{s_3}{\mapsto} 3 \overset{s_2}{\mapsto} 2 \overset{s_2}{\mapsto} 3 \overset{s_1}{\mapsto} 3 \overset{s_2}{\mapsto} 2 \overset{s_3}{\mapsto} 2 \overset{s_2}{\mapsto} 3 \overset{s_1}{\mapsto} 3 \overset{s_2}{\mapsto} 2$$

この結果より，

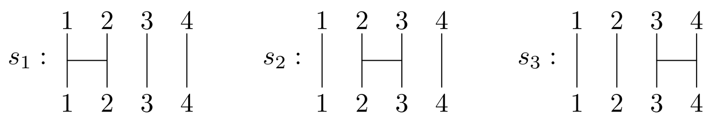
$$s_2s_1s_2s_3s_2s_1s_2s_2s_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

であるとわかる．なお，一般に任意の互換 $(i\ j)$ に対し，$(i\ j)(i\ j) = e$ が成り立つので，本問においては $s_is_i = e$ $(i = 1, 2, 3)$ が成立する．よって，問題の式の左辺の s_2s_2 の部分は取り除いて，

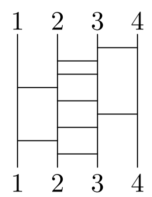
$$s_2s_1s_2s_3s_2s_1s_3$$

としてから計算しても良い．

また，s_1, s_2, s_3 は隣接互換で，それぞれ以下のあみだくじに対応する．



これより $s_2s_1s_2s_3s_2s_1s_2s_2s_3$ は以下のあみだくじに対応する．



これを用いれば

$$s_2s_1s_2s_3s_2s_1s_2s_2s_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

であることが目で見て容易に計算できる．隣接互換の合成の計算をする際にはこのようなあみだくじによる方法も有効である． □

問題 3

$\mathfrak{S}_9$ において，

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 8 & 4 & 9 & 5 & 1 & 2 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

を互いに素な巡回置換の合成で表せ．なお採点は手動で行うので伝わるように書かれていれば問題ないが，例えば講義資料 p.9 のように (1 4 5 6)(2 7) と答えたい場合は，

(1456)(27)

というように入力すればよい．

問題 3 解答例. (1 6)(2 8 7)(3 4 9) □

問題 3 補足解説. 第 4 回講義資料 p.9 の方法で計算を行えば良い．計算の手順は以下の通りである．

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 8 & 4 & 9 & 5 & 1 & 2 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

とおく．まず 1 をとる (これは実際には 1 でなくても何でも良い)．1 の σ による像を次々に計算する：

$$1 \overset{\sigma}{\mapsto} 6 \overset{\sigma}{\mapsto} 1$$

初めに取った 1 に戻ってきたところでストップする．次に，上の過程で現れていない数字を任意にとる．ここでは 2 を取る．そして，上と同様に 2 の σ による像を計算する：

$$2 \overset{\sigma}{\mapsto} 8 \overset{\sigma}{\mapsto} 7 \overset{\sigma}{\mapsto} 2$$

初めに取った 2 に戻ってきたところでストップする．さらに，上の過程でまだ今まで一度も出てきてない数字を任意にとる．ここでは 3 をとる．そして，上と同様に 3 の σ による像を次々に計算する：

$$3 \overset{\sigma}{\mapsto} 4 \overset{\sigma}{\mapsto} 9 \overset{\sigma}{\mapsto} 3$$

初めに取った 3 に戻ってくるのでそこでストップする．ここで，上の過程でまだ今まで一度も出てきてない数字は 5 のみでるが，5 の σ による像を見ると，

$$5 \overset{\sigma}{\mapsto} 5$$

となって, 1 回で初めに取った数字に戻ってくる (つまり動かさない) のでここでストップする．以上で $1, \ldots, 9$ の全ての数が出そろったので，反復の過程をストップする．以上の過程で出てきた数字のサイクルをその順に並べて巡回置換を作り，その合成をとるとこれが σ に一致する．すなわち，

$$\sigma = (1\ 6)(2\ 8\ 7)(3\ 4\ 9)(5) = (1\ 6)(2\ 8\ 7)(3\ 4\ 9)$$

である．こうして得られる巡回置換たちはその作り方から (どの 2 つも) 互いに素となることに注意しよう．□

問題 4

$\mathfrak{S}_5$ の元

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

について，

$$\sigma^k = e$$

を満たすような 1 以上の整数 k で最小のものを半角数字で入力せよ．ただし，$\sigma^k = \underbrace{\sigma \cdots \sigma}_{k\ 個}$ であり，e は $\mathfrak{S}_5$ の単位元である．(Hint: σ を一度互いに素な巡回置換の合成で表すと計算がしやすい．)

問題 4 解答例. 6 □

問題 4 補足解説. 第 4 回講義資料 p.9，問題 3 補足解説で行ったのと同様の方法で σ の互いに素な巡回置換の合成による表示を求めると，

$$\sigma = (1\ 3\ 5)(2\ 4)$$

となる．ここで，互いに素な巡回置換の可換性 (第 4 回講義資料命題 3.6) より，

$$\sigma^k = (1\ 3\ 5)^k (2\ 4)^k$$

である．これが単位元 e となるのは $(1\ 3\ 5)^k = e$ かつ $(2\ 4)^k = e$ となるときである．前者が成り立つのは，k が 3 の倍数のとき，後者が成り立つのは k が 2 の倍数のときなので (第 4 回講義資料命題 3.4)，これらが同時に成り立つのは k が 6 の倍数のときである．よって，$\sigma^k = e$ を満たす 1 以上の整数 k で最小のものは 6 である．□

一般に群 G の元 g に対し，$g^k = e$ (e は G の単位元) を満たす 1 以上の整数 k で最小のものを g の**位数**といい，$\mathrm{ord}\, g$ と書く．本問の場合だと，$\mathrm{ord}\, \sigma = 6$ ということである．詳しくは第 6 回講義資料で扱うこととなる．

対称群の元の位数を求める計算はもちろん地道に行っても良いが，上の計算例のように互いに素な巡回置換の合成による表示を用いると容易である．一般に $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ がどの 2 つも互いに素な巡回置換 $\sigma_1, \ldots, \sigma_s$ を用いて，

$$\sigma = \sigma_1 \cdots \sigma_s$$

と書けるとき，互いに素な巡回置換の可換性 (第 4 回講義資料命題 3.6) より，各 $k \in \mathbb{Z}$ に対し，

$$(\sigma_1 \cdots \sigma_s)^k = \sigma_1^k \cdots \sigma_s^k$$

が成立する．これが単位元 e となるのは

$$\sigma_1^k = \cdots = \sigma_s^k = e \tag{$*$}$$

となるときであるが，$\ell = 1, \ldots, s$ に対し，$\sigma_\ell^k = e$ となるのは，k が $\#S(\sigma_\ell)$ の倍数のとき (第 4 回講義資料命題 3.4) なので，($*$) が成り立つのは k が $\#S(\sigma_1), \ldots, \#S(\sigma_s)$ の最小公倍数 L のときである．よって，

$$\mathrm{ord}(\sigma_1 \cdots \sigma_s) = L$$

である．

□

問題 5

$\mathfrak{S}_4$ の元 σ で，$\sigma^2 = e$ を満たすものの個数を半角数字で入力せよ．

問題 5 解答例． 10 □

問題 5 補足解説．

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ i & j & k & \ell \end{pmatrix} \tag{$**$}$$

が $\sigma^2 = e$ を満たすことの必要十分条件は，($**$) の左辺の表示で，i の下に 1，j の下に 2，k の下に 3，ℓ の下に 4 が書かれていることである．このような組み合わせを列挙すると以下のようになる．

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

よって，求める個数は 10 個である． □

もう少し抽象的な方法も述べておこう．単位元 $e \in \mathfrak{S}_4$ 以外の元 σ については，$\sigma^2 = e$ を満たすということは位数が $\mathrm{ord}\, \sigma = 2$ を満たすということである．よって，問題 4 補足解説で述べた考え方を用いれば，$e \neq \sigma \in \mathfrak{S}_4$ が $\sigma^2 = e$ を満たすということは，σ をどの 2 つも互いに素な巡回置換の合成で表したときに，互換 (=長さ 2 の巡回置換) のみが現れるということと同値である．すなわち，σ をどの 2 つも互いに素な巡回置換の合成で表したときの形が

(I) $\sigma = (i\ j)$，ただし $i < j$．
(II) $\sigma = (i\ j)(k\ \ell)$，ただし $i < j, k < \ell$ で，i, j, k, ℓ は $1, 2, 3, 4$ の並べ替え．

のいずれかであるということである (一般に $(i\ j) = (j\ i)$ なので括弧の中身を小さい順に並べ替えて良いということに注意する)．(I) の形になる元は ${}_4\mathrm{C}_2 = 6$ 個，(II) の形になる元は ${}_4\mathrm{C}_2/2 = 3$ 個なので (2 で割っているのはこの場合 $(i\ j)(k\ \ell) = (k\ \ell)(i\ j)$ のため)，これに単位元を合わせて求める元の個数は 10 個となる． □