# 代数学 I 第 5 回復習レポート課題解答例

担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)*

**問題 1**

$\mathfrak{S}_5$ において，

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

としたとき，

$$\sigma(1\ 2\ 3\ 4\ 5)\sigma^{-1} = (1\ \boxed{ア}\ \boxed{イ}\ \boxed{ウ}\ \boxed{エ})$$

である．$\boxed{ア}$〜$\boxed{エ}$に入る自然数を順に半角数字でコンマで区切って入力せよ (例:1,2,3,4).

**問題 1 解答例．** 3,4,2,5 □

**問題 1 補足解説．** $\mathfrak{S}_5$ の各元が全単射写像 $\{1, \ldots, 5\} \to \{1, \ldots, 5\}$ であったことを思い出し，$\sigma(1\ 2\ 3\ 4\ 5)\sigma^{-1}$ による $1, \ldots, 5$ の像をそれぞれ求めれば，$\sigma(1\ 2\ 3\ 4\ 5)\sigma^{-1}$ を 2 行配列の形で書けるようになる．今の場合，

$$1 \xmapsto{\sigma^{-1}} 3 \xmapsto{(1\ 2\ 3\ 4\ 5)} 4 \xmapsto{\sigma} 3$$
$$2 \xmapsto{\sigma^{-1}} 1 \xmapsto{(1\ 2\ 3\ 4\ 5)} 2 \xmapsto{\sigma} 5$$
$$3 \xmapsto{\sigma^{-1}} 4 \xmapsto{(1\ 2\ 3\ 4\ 5)} 5 \xmapsto{\sigma} 4$$
$$4 \xmapsto{\sigma^{-1}} 5 \xmapsto{(1\ 2\ 3\ 4\ 5)} 1 \xmapsto{\sigma} 2$$
$$5 \xmapsto{\sigma^{-1}} 2 \xmapsto{(1\ 2\ 3\ 4\ 5)} 3 \xmapsto{\sigma} 1$$

となるので，

$$\sigma(1\ 2\ 3\ 4\ 5)\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (1\ 3\ 4\ 2\ 5)$$

であるとわかる． □

実は一般に以下の定理が成り立つ．

**定理**

任意の $n$ 次対称群の元 $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ に対し，以下が成立する．

(1) $\sigma \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix} \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \\ \sigma(i_1) & \sigma(i_2) & \cdots & \sigma(i_n) \end{pmatrix}$.

(2) $\sigma \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix} \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \sigma(i_1) & \sigma(i_2) & \cdots & \sigma(i_n) \end{pmatrix}$.

**証明．** (2) の巡回置換に関する主張は (1) が示されればそこから直ちに導かれるので，(1) を証明する．このためには任意の $k = 1, \ldots, n$ に対し，$\sigma \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix} \sigma^{-1}$ による $\sigma(k)$ の像が $\sigma(i_k)$ であることを示せば良いが，これは以下のようにしてわかる．

$$\sigma(k) \xmapsto{\sigma^{-1}} k \xmapsto{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{smallmatrix}\right)} i_k \xmapsto{\sigma} \sigma(i_k).$$

* *e-mail*：hoya@shibaura-it.ac.jp

$\square$

この定理を知っていれば，本問は

$$\sigma(1\ 2\ 3\ 4\ 5)\sigma^{-1} = (\sigma(1)\ \sigma(2)\ \sigma(3)\ \sigma(4)\ \sigma(5)) = (2\ 5\ 1\ 3\ 4) = (1\ 3\ 4\ 2\ 5)$$

というようにして直ちに解くことができる．この定理は今後も便利なことがあるので証明を含めて覚えておくと良いであろう．興味のある方は「対称群の共役類」という言葉で調べてみてもらいたい． $\square$

**問題 2**

$\mathfrak{S}_4$ において，

$$(1\ 2\ 3)(2\ 3\ 4)(2\ 4)(1\ 4\ 3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \boxed{\text{ア}} & \boxed{\text{イ}} & \boxed{\text{ウ}} & \boxed{\text{エ}} \end{pmatrix}$$

である．$\boxed{\text{ア}}$〜$\boxed{\text{エ}}$に入る自然数を順に半角数字でコンマで区切って入力せよ (例:1,2,3,4)．

**問題 2 解答例.** 1,3,2,4 $\square$

**問題 2 補足解説.** 本問のようにたくさんの巡回置換 (互換) の合成の結果を考える場合，各巡回置換を全て 2 行配列の形に直して計算するというのは書く量が非常に多くなるためお勧めしない．$\mathfrak{S}_n$ の各元が全単射写像 $\{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ であったということを思い出し，与えられた巡回置換の合成による $1, \ldots, n$ の像をそれぞれ求めるのが良いと思われる．例えば，本問の場合以下のように計算を行う．

$$1 \xmapsto{(1\ 4\ 3)} 4 \xmapsto{(2\ 4)} 2 \xmapsto{(2\ 3\ 4)} 3 \xmapsto{(1\ 2\ 3)} 1$$
$$2 \xmapsto{(1\ 4\ 3)} 2 \xmapsto{(2\ 4)} 4 \xmapsto{(2\ 3\ 4)} 2 \xmapsto{(1\ 2\ 3)} 3$$
$$3 \xmapsto{(1\ 4\ 3)} 1 \xmapsto{(2\ 4)} 1 \xmapsto{(2\ 3\ 4)} 1 \xmapsto{(1\ 2\ 3)} 2$$
$$4 \xmapsto{(1\ 4\ 3)} 3 \xmapsto{(2\ 4)} 3 \xmapsto{(2\ 3\ 4)} 4 \xmapsto{(1\ 2\ 3)} 4$$

この結果より，

$$(1\ 2\ 3)(2\ 3\ 4)(2\ 4)(1\ 4\ 3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

であるとわかる． $\square$

**問題 3**

$D_8$ において，

$$(\sigma^2\tau\sigma^3)^{-1}\tau\sigma^{10}\tau^{-1}(\tau\sigma^{-3})^{-1} = \sigma^{\boxed{\text{ア}}}\tau^{\boxed{\text{イ}}}$$

である (二面体群の元については第 5 回講義資料の記号を用いる．以下の問題でも同様)．$\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イ}}$に入る自然数を順に半角数字でコンマで区切って入力せよ．ただし，$\boxed{\text{ア}}$は 0 以上 7 以下，$\boxed{\text{イ}}$は 0 または 1 の値で解答せよ．

**問題 3 解答例.** 6,0 $\square$

**問題 3 補足解説.** $D_n$ における二項演算の計算を行うためには，以下の $\sigma, \tau$ に関する関係式を頭に入れて置く必要がある (第 5 回講義資料命題 4.2, 補題 4.4 参照)．

$D_n$ において以下が成立する．

(1) 任意の $k, \ell \in \mathbb{Z}$ に対し，$\sigma^{k+\ell n} = \sigma^k$．
(2) $\tau^2 = e$．すなわち，$\tau^{-1} = \tau$．
(3) 任意の $k \in \mathbb{Z}$ に対し，$\tau\sigma^k = \sigma^{-k}\tau$．

これらを繰り返し用いれば本問の左辺は以下のように計算できる．なお，これは計算手順の一例を示したものであり，必ずしもこの手順で計算しないといけないわけではない．群の二項演算は結合法則を満たすので，どこから計算を始めても良いのである (ただし $D_n$ は非可換群なので，項の順番を並べ替えてはいけない).

$$\begin{aligned}(\sigma^2\tau\sigma^3)^{-1}\tau\sigma^{10}\tau^{-1}(\tau\sigma^{-3})^{-1} &= \sigma^{-3}\tau^{-1}\sigma^{-2}\tau\sigma^{10}\tau^{-1}\sigma^3\tau^{-1} \qquad ((gh)^{-1}=h^{-1}g^{-1}\text{を用いた})\\ &= \sigma^{-3}\tau\sigma^{-2}\tau\sigma^{10}\tau\sigma^3\tau \qquad (\text{上の (2) を用いて}\tau^{-1}\text{を}\tau\text{にした})\\ &= \sigma^{-3+2+10-3}\tau^4 \qquad (\text{上の (3) を繰り返し用いて}\sigma\text{を左に寄せた})\\ &= \sigma^6 \qquad (\text{上の (2) を用いて}\tau^4=e\text{ とした})\end{aligned}$$

□

**問題 4**

$D_6$ の以下の部分集合 $H$ が $D_6$ の部分群となるかどうかを判定せよ．

$$H=\{e,\sigma^3,\tau,\sigma^3\tau\}$$

**問題 4 解答例.** 部分群となる □

**問題 4 補足解説.** $H$ の元らの間の二項演算の結果は以下の表のようになる (問題 3 補足解説に述べた $D_6$ における関係式にも注意).

| | $e$ | $\sigma^3$ | $\tau$ | $\sigma^3\tau$ |
|---|---|---|---|---|
| $e$ | $e$ | $\sigma^3$ | $\tau$ | $\sigma^3\tau$ |
| $\sigma^3$ | $\sigma^3$ | $\sigma^6=e$ | $\sigma^3\tau$ | $\sigma^6\tau=\tau$ |
| $\tau$ | $\tau$ | $\tau\sigma^3=\sigma^{-3}\tau=\sigma^3\tau$ | $\tau^2=e$ | $\tau\sigma^3\tau=\sigma^{-3}\tau^2=\sigma^3$ |
| $\sigma^3\tau$ | $\sigma^3\tau$ | $\sigma^3\tau\sigma^3=\sigma^{3-3}\tau=\tau$ | $\sigma^3\tau^2=\sigma^3$ | $\sigma^3\tau\sigma^3\tau=\sigma^{3-3}\tau^2=e$ |

ただし，$g$ 行 $g'$ 列に $gg'$ を書くというルールで表を書いている (このような表を群の**乗積表**と言う)．見やすさのために，計算の途中式を省いた乗積表を再掲すると，以下のようになる．

| | $e$ | $\sigma^3$ | $\tau$ | $\sigma^3\tau$ |
|---|---|---|---|---|
| $e$ | $e$ | $\sigma^3$ | $\tau$ | $\sigma^3\tau$ |
| $\sigma^3$ | $\sigma^3$ | $e$ | $\sigma^3\tau$ | $\tau$ |
| $\tau$ | $\tau$ | $\sigma^3\tau$ | $e$ | $\sigma^3$ |
| $\sigma^3\tau$ | $\sigma^3\tau$ | $\tau$ | $\sigma^3$ | $e$ |

この表に現れる元が全て $H$ の元であることは $H$ が二項演算で閉じていることを表しており，各行 (あるいは各列) に単位元 $e$ があることが，$H$ のそれぞれの元の逆元が $H$ 内に存在することを意味している．これより，$H$ が $D_6$ の部分群となることがわかる． □

一般に，群 $G$ の部分集合 $H$ が $G$ の部分群であることの必要十分条件は，

『$H$ が空でなく，任意の $h,k\in H$ に対し，$h\cdot k\in H$ かつ $h^{-1}\in H$ となること』

であった．部分群であるかどうかの判定についてはこの条件を確認すれば良い．本問のように元の個数が少なくて二項演算の計算も容易である場合には，二項演算を全通り計算してこれを確かめれば良い．ちなみに，上の補足解説で書いた乗積表では対角の部分 ($g$ 行 $g$ 列の部分) が全て単位元 $e$ となっているが，これは $H$ の元が全て 2 乗すると単位元になるという特殊事情に対応している．一般の乗積表でこのような性質が成り立つわけではないので注意をしておく． □

**問題 5**

$D_4$ の位数 2 の部分群の個数を半角数字で入力せよ．

**問題 5 解答例.** 5 □

**問題 5 補足解説.** $H$ が $D_4$ の位数 2 の部分群であるとすると，部分群は $D_4$ の単位元を必ず含むことにより (第 1,2 回講義資料命題 1.4 (3))，単位元でないある元 $g \in D_4$ を用いて $H = \{e, g\}$ と書ける．さらにこのとき $H$ は二項演算で閉じているため，$g^2$ は $e$ か $g$ のいずれかであるが，$g^2 = g$ であるとすると，両辺に $g^{-1}$ を掛けて $g = e$ となって $g$ の取り方に矛盾するので，$g^2 = e$ である．

逆に $g \in D_4$ が $g^2 = e$ を満たす元でさえあれば，

$$ee = gg = e, \qquad eg = ge = g, \qquad e^{-1} = e, \qquad g^{-1} = g$$

となるので，$H = \{e, g\}$ は二項演算と逆元を取る操作で閉じ，$D_4$ の部分群となる．以上より，$D_4$ の位数 2 の部分群の個数は $D_4$ の単位元でない元 $g$ であって $g^2 = e$ を満たすものの個数と一致する．後は $D_4$ の各元 $g$ について $g^2$ を計算してみると，$g^2 = e$ を満たす単位元でない元 $g$ は

$$\sigma^2, \quad \tau, \quad \sigma\tau, \quad \sigma^2\tau, \quad \sigma^3\tau$$

の 5 つで全てであることがわかる．よって，求める部分群の個数は 5 つである． □

ここの補足解説と全く同様の議論で一般に「群 $G$ の位数 2 の部分群」の個数と「群 $G$ の単位元でない元 $g$ で $g^2 = e$ を満たすもの」の個数が一致することがわかる． □