代数学 I 第 8 回復習レポート課題解答例

担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)*

問題 1

以下の $\mathbb{R}^2$ 上の関係 $\sim_1, \sim_2, \sim_3$ のうち同値関係であるものを全て選択せよ.

(1) $(x_1, y_1) \sim_1 (x_2, y_2) \Leftrightarrow$ ある正の実数λが存在して，$x_1 = \lambda x_2$ かつ $y_1 = \lambda y_2$.
(2) $(x_1, y_1) \sim_2 (x_2, y_2) \ \Leftrightarrow\ x_1 = x_2$ または $y_1 = y_2$.
(3) $(x_1, y_1) \sim_3 (x_2, y_2) \ \Leftrightarrow\ |x_1| = |x_2|$.

問題 1 解答例. (1), (3) □

問題 1 補足解説. 与えられた関係が同値関係であるかどうかを確認するためには，反射律，対称律，推移律の 3 つを満たすかどうかを確認すれば良い.

(1) (反射律) $\lambda = 1$ とすると，任意の $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ に対して，$x = \lambda x$ かつ $y = \lambda y$ なので，$(x, y) \sim_1 (x, y)$.
(対称律) $(x_1, y_1) \sim_1 (x_2, y_2)$ であるとすると，ある $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ が存在して，$x_1 = \lambda x_2$ かつ $y_1 = \lambda y_2$. このとき，

$$x_2 = \frac{1}{\lambda} x_1, \qquad y_2 = \frac{1}{\lambda} y_1$$

であり，$1/\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ なので，$(x_2, y_2) \sim_1 (x_1, y_1)$.
(推移律) $(x_1, y_1) \sim_1 (x_2, y_2)$ かつ $(x_2, y_2) \sim_1 (x_3, y_3)$ であるとすると，ある $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}_{>0}$ が存在して，$x_1 = \lambda x_2, y_1 = \lambda y_2, x_2 = \lambda' x_3, y_2 = \lambda' y_3$. このとき，

$$x_1 = \lambda\lambda' x_3, \qquad y_1 = \lambda\lambda' y_3$$

であり，$\lambda\lambda' \in \mathbb{R}_{>0}$ なので，$(x_1, y_1) \sim_1 (x_3, y_3)$.
　以上より，$\sim_1$ は同値関係である.

(2) $\sim_2$ の定義より，$(0, 0) \sim_2 (0, 1), (0, 1) \sim_2 (1, 1)$ であるが，$(0, 0) \not\sim_2 (1, 1)$ である. よって，関係 $\sim_2$ は推移律を満たさないので，同値関係ではない.

(3) (反射律) 任意の $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ に対して，$|x| = |x|$ なので，$(x, y) \sim_3 (x, y)$.
(対称律) $(x_1, y_1) \sim_3 (x_2, y_2)$ であるとすると，$|x_1| = |x_2|$. よって，$(x_2, y_2) \sim_3 (x_1, y_1)$.
(推移律) $(x_1, y_1) \sim_3 (x_2, y_2)$ かつ $(x_2, y_2) \sim_3 (x_3, y_3)$ であるとすると，$|x_1| = |x_2|$ かつ $|x_2| = |x_3|$. このとき，$|x_1| = |x_3|$ なので，$(x_1, y_1) \sim_3 (x_3, y_3)$.
　以上より，$\sim_3$ は同値関係である. □

　講義内でも解説した通り，一般に集合 X, Y とその間の写像 $f\colon X \to Y$ に対し，

$$x_1 \sim_f x_2 \ \Leftrightarrow\ f(x_1) = f(x_2)$$

で定まる X 上の関係 $\sim_f$ は同値関係である (証明は上の方法で各自考えよ). 本問の (3) の関係は写像として，

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto |x|$$

を考えた場合の $\sim_f$ である. □

* *e-mail*：`hoya@shibaura-it.ac.jp`

記号の準備

4 次対称群 $\mathfrak{S}_4$ の元に以下のようにアルファベットを割り当てる．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$
$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$
$$G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$
$$J = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad K = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \quad O = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$
$$S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$
$$V = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad W = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

問題 2

$\mathfrak{S}_4$ の部分群

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}$$

を考える．このとき，$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ の H による左剰余類

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} H$$

に含まれる元を，上で $\mathfrak{S}_4$ の各元に割り当てたアルファベットを用いて全て挙げよ．

問題 2 解答例. B, D, U, W □

問題 2 補足解説. 左剰余類の定義 (第 8 回講義資料定義 6.6) にしたがって以下のように計算すれば良い．

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} H \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \right. \\
&\qquad \left. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \right\}.
\end{aligned}$$

□

問題 3

$\mathfrak{S}_4$ の部分群

$$H = \langle (1\ 3\ 4) \rangle$$

を考える．このとき，$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ の H による右剰余類

$$H \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

に含まれる元を，上で $\mathfrak{S}_4$ の各元に割り当てたアルファベットを用いて全て挙げよ．

問題 3 解答例. H, I, L □

問題 3 補足解説.

$$(1\ 3\ 4)^2 = (1\ 4\ 3), \qquad (1\ 3\ 4)^3 = e$$

であることに注意すると，

$$H = \{e,\ (1\ 3\ 4), (1\ 4\ 3)\}$$

である．あとは右剰余類の定義 (第 8 回講義資料定義 6.6) にしたがって，以下のように計算すれば良い．

$$\begin{aligned}
&H \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \\
&= \left\{ e \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, (1\ 3\ 4) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, (1\ 4\ 3) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \right\}.
\end{aligned}$$

□

問題 4

D_6 の部分群

$$H = \{e, \sigma^2, \sigma^4\}$$

を考える (D_6 の元については第 5 回講義資料の記号を用いる)．このとき，以下の D_6 の部分集合の中から D_6 の H に関する左完全代表系であるものを<u>全て選択</u>せよ．

(1) $\{\sigma, \tau\}$
(2) $\{\sigma, \sigma^2, \tau, \sigma\tau\}$
(3) $\{e, \sigma^3, \tau, \sigma^3\tau\}$
(4) D_6

問題 4 解答例. (2),(3) □

問題 4 補足解説. D_6 を H に関する左剰余類によって分割し，そこで現れる全ての左剰余類からちょうど 1 つずつ元を選んで作られている D_6 の部分集合が H に関する左完全代表系である．まず，D_6 の左剰余類による分割を考えると，

$$\begin{aligned}
eH &= \{e, \sigma^2, \sigma^4\} & \sigma H &= \{\sigma, \sigma^3, \sigma^5\} \\
\tau H &= \{\tau e, \tau\sigma^2, \tau\sigma^4\} = \{\tau, \sigma^4\tau, \sigma^2\tau\} & \sigma\tau H &= \{\sigma\tau e, \sigma\tau\sigma^2, \sigma\tau\sigma^4\} = \{\sigma\tau, \sigma^5\tau, \sigma^3\tau\}
\end{aligned}$$

なので，

$$D_6 = eH \cup \sigma H \cup \tau H \cup \sigma\tau H$$

となる．よって，本問の選択肢の中では $eH, \sigma H, \tau H, \sigma\tau H$ のそれぞれからちょうど 1 つずつ元を抜き出して得られている (2), (3) が D_6 の H に関する左完全代表系となる． □

一般に群 G とその部分群 H が与えられたとき，H に関する左剰余類への G の分割は以下のようにして考えれば良い．

(Step 0) まず，e の H に関する左剰余類 eH を考える (これはいつも H である)．$G = H$ のときはここで終了．

(Step 1) 次に，eH に現れなかった G の元 g_1 を任意に 1 つとり，g_1 の H に関する左剰余類 g_1H を求める．$G = eH \cup g_1H$ のときはここで終了．

(Step 2) 次に，$eH \cup g_1H$ にはまだ現れていない G の元 g_2 を任意に 1 つとり，g_2 の H に関する左剰余類 g_2H を求める．$G = eH \cup g_1H \cup g_2H$ のときはここで終了．

⋮

(Step k) 次に，$eH \cup g_1H \cup \cdots \cup g_{k-1}H$ にはまだ現れていない G の元 g_k を任意に 1 つとり，g_k の H に関する左剰余類 g_kH を求める．$eH \cup g_1H \cup \cdots \cup g_kH$ のときはここで終了．

⋮

$(G : H) = \infty$ のときは，このステップは有限回では終わらないのでまた別の方法を考える必要があるが，$(G : H)$ が有限であればこの方法で H に関する左剰余類への G の分割が求められる．

なお本問の場合，例えば $\sigma^2 H$ 等を考え落としていると思うかもしれないが，$\sigma^2 \in eH$ なので，

$$\sigma^2 H = eH$$

であるから (第 8 回講義資料命題 6.3 (2) の “同値類を表す代表元の取り換え”) 改めて計算しなくて良いのである． □

問題 5

D_6 の部分群

$$H = \{e, \sigma^2, \sigma^4\}$$

を考える (これは問題 4 で考えた部分群である)．このとき，H の D_6 における指数 $(D_6 : H)$ を半角数字で入力せよ．

問題 5 解答例． 4 □

問題 5 補足解説． 指数 $(D_6 : H)$ の定義は，商集合 D_6/H の元の個数であったが，これは D_6 において H に関する左剰余類として現れる部分集合の種類の個数に他ならない．よって，D_6 の H に関する左剰余類による分割を考えたときに現れる左剰余類の個数 (“クラス分け” したときの “クラス” の個数) が指数 $(D_6 : H)$ であり，問題 4 補足解説での計算により $(D_6 : H) = 4$ であるとわかる ($eH, \sigma H, \tau H, \sigma\tau H$ の 4 つ)． □

本問は問題 4 の補足解説のように地道に左剰余類による分割を計算して求めてもらえば良いが，計算していると全ての左剰余類は 3 つの元からなるということに気付かれるだろう．この 3 という値は計算の過程を考えると，H の位数に他ならないことがわかる．実はこの事実は常に成立する．つまり以下が成り立つ．

命題

G を群とし，H を G の部分群とする．このとき，任意の $g \in G$ に対し，$|gH| = |Hg| = |H|$．

この命題は第 9 回の講義で証明を行う．これを用いれば，D_6 を H による左剰余類で分割したときに現れる左剰余類の個数は

$$|D_6| \div |H| = 12 \div 3 = 4$$

と計算できる．これは第 9 回講義で学ぶラグランジュの定理に他ならない．本問のような問題はラグランジュの定理を知っていれば実は具体的な剰余類への分割を計算しなくても解ける問題なのである． □