代数学 I 第 9 回復習レポート課題解答例

担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)*

問題 1

5 次対称群 $\mathfrak{S}_5$ とその部分群

$$H = \langle\{(1\ 2), (1\ 2\ 3)\}\rangle$$

を考える．このとき，H の $\mathfrak{S}_5$ における指数 $(\mathfrak{S}_5 : H)$ を半角数字で入力せよ．

問題 1 解答例. 20 □

問題 1 補足解説. ラグランジュの定理より，

$$(\mathfrak{S}_5 : H) = \frac{|\mathfrak{S}_5|}{|H|} = \frac{120}{|H|}$$

である．よって，あとは H の位数を求めれば良い．ここで，

$$(1\ 2)(1\ 2\ 3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} = (2\ 3)$$
$$(1\ 2\ 3)(1\ 2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} = (1\ 3)$$
$$(1\ 2\ 3)(1\ 2\ 3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} = (1\ 3\ 2)$$

なので，

$$\{e, (1\ 2), (1\ 3), (2\ 3), (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\} \subset H$$

である．ここで，巡回置換の定義を考えると $\{e, (1\ 2), (1\ 3), (2\ 3), (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$ の元の間の二項演算は $\mathfrak{S}_3$ において対応する元の二項演算の計算の規則と全く同じになるので，この部分集合は二項演算と逆元を取る操作で閉じており，$\mathfrak{S}_5$ の部分群となる．H は $\{(1\ 2), (1\ 2\ 3)\}$ を含む $\mathfrak{S}_5$ の最小の部分群であったから (第 6 回講義資料命題 5.3)，これより

$$\{e, (1\ 2), (1\ 3), (2\ 3), (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\} \supset H$$

も成立する．よって，

$$H = \{e, (1\ 2), (1\ 3), (2\ 3), (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$$

であり，$|H| = 6$ である．以上より，求める指数は

$$(\mathfrak{S}_5 : H) = \frac{120}{|H|} = \frac{120}{6} = 20.$$

□

群 G とその部分群 H に対し，G における H の指数 $(G : H)$ は商集合 G/H の元の個数であった (第 8 回講義資料定義 6.6)．G が有限群であれば，ラグランジュの定理を用いることで，G の左剰余類による具体的な分割を計算することなく本問のようにこの値が求められる．なお，$H = \langle\{(1\ 2), (1\ 2\ 3)\}\rangle$ の具体形を計算する部分は以下のようにも考えられる：

* *e-mail*：hoya@shibaura-it.ac.jp

$(1\ 2)$ も $(1\ 2\ 3)$ も全単射写像 $\{1,2,3,4,5\} \to \{1,2,3,4,5\}$ としては 4 を 4 に，5 を 5 に移す写像なので，これらとその逆写像を何度も合成して得られる写像も同じ性質を満たす．よって，

$$H \subset \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ i & j & k & 4 & 5 \end{pmatrix} \middle| \, i,j,k \text{ は } 1,2,3 \text{ の並べ替え} \right\} =: H'$$

である．ここで，$|H'| = 3! = 6$ なので，あとは H が元を少なくとも 6 つ含むことを示せば $H = H'$ がわかる．(ここからは解答例の計算と同様の具体的な計算で $\{e, (1\ 2), (1\ 3), (2\ 3), (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\} \subset H$ を示す．) □

一般に群 G の部分集合 S を与えたとき，S の生成する G の部分群 $\langle S \rangle$ の元の全てを重複なく具体的に列挙するアルゴリズムがあるわけではないので，このような形の部分群の具体形は本問のように毎回少し工夫しながら求めることになる． □

問題 2

G を巡回群でない位数 14 の群とする．G の元 g が $g^2 \neq e$ (e は G の単位元) を満たすとき，g の位数を求めよ．

問題 2 解答例. 7 □

問題 2 補足解説. ラグランジュの定理の系より，$\operatorname{ord} g$ は $|G| = 14$ の約数である．よって，$\operatorname{ord} g$ は

$$1, 2, 7, 14$$

のいずれかである．ここで，$\operatorname{ord} g = 1$ または 2 とすると，$g^2 = e$ となるので仮定に反する．また，$\operatorname{ord} g = 14$ とすると，位数の定義より $|\langle g \rangle| = 14$ となるが，$|G| = 14$ より，このとき $G = \langle g \rangle$ となる．これは，G が巡回群でないという仮定に反する．

以上より，$\operatorname{ord} g = 7$ である． □

本問のような状況の具体例としては，7 次二面体群 D_7 とその元 σ が挙げられる ($\sigma^k, k = 2, \ldots, 6$ をとっても位数 7 である)．実は巡回群でない位数 14 の群は D_7 と同型なものしか存在しないことが知られている．つまり，具体例は本質的にはこれしかない．「同型」については第 10 回講義で詳しく解説を行う． □

問題 3

2 次一般線形群 $GL_2(\mathbb{C})$ とその部分群

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{C}) \, \middle| \, d_1 d_2 \neq 0 \right\}$$

を考える．このとき，H が $GL_2(\mathbb{C})$ の正規部分群であるかどうかを判定せよ．

問題 3 解答例. 正規部分群でない □

問題 3 補足解説. 正規部分群の定義 (第 9 回講義資料定義 7.6) より，一般に群 G の部分群 H が G の正規部分群であることを証明するためには，

任意の $g \in G$ と $h \in H$ に対して，$ghg^{-1} \in H$ となること

を示せば良かった．本問と問題 4 でこれを練習してみよう．なお，これはあくまで部分<u>群</u> H が正規部分群であることを示すために確認すべき条件である．G の部分<u>集合</u> H が正規部分群であることを示す際は，上の条件の確認だけでは不十分で，今まで通りの方法で H が部分群であることも別に示す必要がある．

本問の H が $GL_2(\mathbb{C})$ の正規部分群でないことの証明: 例えば $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{C})$, $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in H$ に対し，

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \notin H$$

となる．よって，H は $GL_2(\mathbb{C})$ の正規部分群でない． □

このように，群 G の部分群 H が正規部分群でないことを証明する際には，$ghg^{-1} \notin H$ を満たすような $g \in G, h \in H$ の例を 1 つ挙げれば良い．なお，H が部分群である場合，$g \in H$ であれば，任意の $h \in H$ に対して，$ghg^{-1} \in H$ となってしまうため，上のような例を見つけたいときには $g \in G$ としては H に含まれない元から探してくる必要があることに注意する (H の中でいくら探しても $ghg^{-1} \notin H$ となるような g の例は見つけられない)． □

問題 4

4 次対称群 $\mathfrak{S}_4$ とその部分群

$$H = \{e, (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\}$$

を考える．このとき，H が $\mathfrak{S}_4$ の正規部分群であるかどうかを判定せよ．

問題 4 解答例． 正規部分群である □

問題 4 補足解説． 問題 3 補足解説に述べた方針で H が $\mathfrak{S}_4$ の正規部分群であることを証明する．

本問の H が $\mathfrak{S}_4$ の正規部分群であることの証明: まず，任意の $1, 2, 3, 4$ の並べ替え i, j, k, ℓ に対し，$(i\ j)(k\ \ell) \in H$ であることに注意する (互いに素な巡回置換の可換性より，$(1\ 2)(3\ 4) = (3\ 4)(1\ 2)$ 等が成立することに注意する)．すなわち，

$$H = \{e\} \cup \{(i\ j)(k\ \ell) \in \mathfrak{S}_4 \mid i, j, k, \ell \text{ は } 1, 2, 3, 4 \text{ の並べ替え }\} \qquad (*)$$

である．ここで，任意の $\sigma \in \mathfrak{S}_4$ と，任意の $1, 2, 3, 4$ の並べ替え i, j, k, ℓ に対し，

$$\begin{aligned}
&\sigma e \sigma^{-1} = \sigma\sigma^{-1} = e \in H, \\
&\sigma(i\ j)(k\ \ell)\sigma^{-1} = (\sigma(i\ j)\sigma^{-1})(\sigma(k\ \ell)\sigma^{-1}) = (\sigma(i)\ \sigma(j))(\sigma(k)\ \sigma(\ell))
\end{aligned}$$

となる．ここで，i, j, k, ℓ が $1, 2, 3, 4$ の並べ替えであるとき，$\sigma(i), \sigma(j), \sigma(k), \sigma(\ell)$ も $1, 2, 3, 4$ の並べ替えであるので，$(*)$ より $(\sigma(i)\ \sigma(j))(\sigma(k)\ \sigma(\ell)) \in H$ である．よって，H は $\mathfrak{S}_4$ の正規部分群である． □

第 5 回復習レポート課題解答例問題 1 補足解説において以下のような定理を証明したことを思い出そう．

定理

任意の n 次対称群の元 $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ に対し，以下が成立する．

(1) $\sigma \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix} \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \\ \sigma(i_1) & \sigma(i_2) & \cdots & \sigma(i_n) \end{pmatrix}$.

(2) $\sigma \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix} \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \sigma(i_1) & \sigma(i_2) & \cdots & \sigma(i_n) \end{pmatrix}$.

上記の解答例では，この定理の (2) を互換に対して用いている．

本問では 4 次対称群 $\mathfrak{S}_4$ の部分集合

$$H = \{e,\ (1\ 2)(3\ 4),\ (1\ 3)(2\ 4),\ (1\ 4)(2\ 3)\}$$

が部分群であることは前提として出題を行ったが，これも本来は証明すべきことである．ここで証明をしておこう．H の元の間の二項演算の結果は以下のようになる．ただし，g 行 g' 列に gg' を書くというルールで表を書いている．

	e	$(1\ 2)(3\ 4)$	$(1\ 3)(2\ 4)$	$(1\ 4)(2\ 3)$
e	e	$(1\ 2)(3\ 4)$	$(1\ 3)(2\ 4)$	$(1\ 4)(2\ 3)$
$(1\ 2)(3\ 4)$	$(1\ 2)(3\ 4)$	e	$(1\ 4)(2\ 3)$	$(1\ 3)(2\ 4)$
$(1\ 3)(2\ 4)$	$(1\ 3)(2\ 4)$	$(1\ 4)(2\ 3)$	e	$(1\ 2)(3\ 4)$
$(1\ 4)(2\ 3)$	$(1\ 4)(2\ 3)$	$(1\ 3)(2\ 4)$	$(1\ 2)(3\ 4)$	e

この表に現れる元が全て H の元であることは H が二項演算で閉じていることを表しており，各行 (あるいは各列) に単位元 e があることが，H のそれぞれの元の逆元が H 内に存在することを意味している．これより，H が $\mathfrak{S}_4$ の部分群となることがわかる．さらに，この表は「転置」しても元の表に一致する (g 行 g' 列の値と g' 行 g 列の値が全て等しい) ので，ここから H が可換群であることも表からわかる．

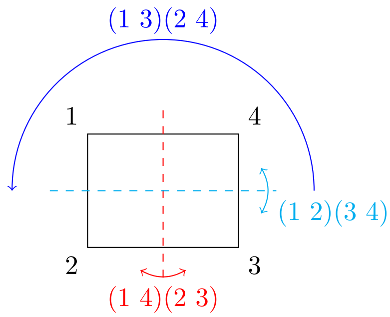
実はこの $\mathfrak{S}_4$ の正規部分群 H には**クラインの 4 元群 (Klein four-group)** という名前がついている．しばしば V という文字で書かれるので，以下では V でこの群を表すことにする[*1]．

コラム：クラインの 4 元群 V とは何か?

実はクラインの 4 元群 V は長方形の対称性を表す群である．長方形の対称変換は，

恒等変換，対称軸に関する折り返しが 2 通り，180° 回転

で与えられる (下図参照)．ここで，第 5 回講義資料の p.4 で考えたように，長方形の各頂点に 1,2,3,4 と番号を付けることで，上記の対称変換に $\mathfrak{S}_4$ の元を以下のように対応させることができる (どの位置の頂点がどの位置の頂点に行くかを記録する)．



これを見ると，それぞれの対称変換が確かに V の各元に対応していることがわかる．ちなみに，このように考えれば V は D_4 の (正規) 部分群であることも類推できるだろう (正方形は長方形の特別な場合である)．実際第 5 回講義資料の D_4 の元の記号を用いると，

$$\sigma^2 = (1\ 3)(2\ 4) \quad \sigma\tau = (1\ 2)(3\ 4) \quad \sigma^3\tau = (1\ 4)(2\ 3)$$

より，$V = \{e, \sigma^2, \sigma\tau, \sigma^3\tau\}$ である．

コラム：剰余群 $\mathfrak{S}_4/V$ について

$\mathfrak{S}_4$ を V による剰余類 (正規なので左右の区別はない) で分解すると，

$$\mathfrak{S}_4 = V \cup (1\ 2)V \cup (2\ 3)V \cup (1\ 3)V \cup (1\ 2\ 3)V \cup (1\ 3\ 2)V$$

となるので，

$$\mathfrak{S}_4/V = \{\sigma V \mid \sigma \in \mathfrak{S}_4\} = \{V, (1\ 2)V, (2\ 3)V, (1\ 3)V, (1\ 2\ 3)V, (1\ 3\ 2)V\}$$

となる．この分解の計算は演習問題として残しておくので，是非力試しで自分で計算してみてほしい．このとき，剰余群における二項演算の定義 (第 9 回講義資料定理 7.7) から $\mathfrak{S}_4/V$ の二項演算は

$$\{e, (1\ 2), (2\ 3), (1\ 3), (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$$

の間に成り立つ計算公式と同じとなる．例えば，

$$(1\ 2)V \cdot (2\ 3)V = (1\ 2)(2\ 3)V = (1\ 2\ 3)V$$

等となる．これより，第 10 回講義資料定義 8.1, 定義 8.6 の言葉を用いれば，

$$\phi\colon \mathfrak{S}_3 \to \mathfrak{S}_4/V,\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i & j & k \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ i & j & k & 4 \end{pmatrix} V$$

は同型となる．よって $\mathfrak{S}_3 \simeq \mathfrak{S}_4/V$ である． □

[*1] この群は単位元以外の全ての元の位数が 2 なので巡回群ではない．これは巡回群でない位数最小の群となっている (位数 2 または 3 の群は第 9 回講義資料系 7.5 より必ず巡回群となる)．

問題 5

8 次二面体群 D_8 とその正規部分群

$$N = \{e, \sigma^4\}$$

を考える．ただし，二面体群の元については第 5 回講義資料の記号を用いる．このとき，剰余群 D_8/N において，

$$\tau N \cdot \sigma\tau N$$

と等しい元を以下から全て選択せよ．

(1) N
(2) σN
(3) $\sigma^3 N$
(4) $\sigma^7 N$
(5) τN

問題 5 解答例. (3), (4) □

問題 5 補足解説. 剰余群の二項演算の定義 (第 9 回講義資料定理 7.7) より，

$$\tau N \cdot \sigma\tau N = \tau\sigma\tau N = \sigma^{-1}\tau^2 N = \sigma^7 e N = \sigma^7 N$$

となる．ここで，$g \in D_8$ に対し，

$$gN = \sigma^7 N \quad \Leftrightarrow \quad g \in \sigma^7 N$$

である．$\sigma^7 N$ を求めると，

$$\sigma^7 N = \{\sigma^7 g \mid g \in N\} = \{\sigma^7, \sigma^{11}\} = \{\sigma^3, \sigma^7\}.$$

これより，本問の選択肢の中で $\sigma^7 N$ に一致するものは $\sigma^3 N, \sigma^7 N$ の 2 つである． □

一般に群 G とその部分群 H に対し，

$$gH = g'H \quad \Leftrightarrow \quad g' \in gH$$

となる．これは，第 8 回講義資料命題 6.3 (2) で証明した同値類の一般的な性質を左剰余類の場合に適用したものである． □