代数学 I 第 10 回復習レポート課題解答例

担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)*

問題 1

以下の写像 ϕ について正しい記述を選択せよ．

$$\phi\colon GL_2(\mathbb{C}) \to GL_2(\mathbb{C}),\ A \mapsto ({}^tA)^{-1}$$

ここで，${}^tA$ は A の転置行列*1を表す．

(1) 群同型である
(2) 群準同型であるが群同型ではない
(3) 群準同型ではない

問題 1 解答例. (1) □

問題 1 補足解説. 群同型の定義は全単射群準同型であったので，ϕ が群同型であることを示すには，

(I) ϕ が群準同型であること．
(II) ϕ が全単射写像であること．

を示せばよい．それぞれ以下のように示される．
(I) 任意の $A, B \in GL_2(\mathbb{C})$ に対し，

$$\phi(AB) = ({}^t(AB))^{-1} = ({}^tB\,{}^tA)^{-1} = ({}^tA)^{-1}({}^tB)^{-1} = \phi(A)\phi(B)$$

よって，ϕ は群準同型である．
(II) 任意の $A \in GL_2(\mathbb{C})$ に対し，

$$(\phi \circ \phi)(A) = ({}^t(({}^tA)^{-1}))^{-1} = (({}^{tt}A)^{-1})^{-1} = A$$

より，

$$\phi \circ \phi = \mathrm{id}_{GL_2(\mathbb{C})} \quad (\text{恒等写像})$$

よって，ϕ は逆写像を持つ写像なので (ϕ 自身が ϕ の逆写像) 全単射である．
　以上より，ϕ が群同型であることが示された． □

　本問では行列の転置および逆行列をとる操作に関する以下の性質を用いている．こういった性質は本講義では既知のものとして扱うので忘れている方は線形代数の内容を復習しておくようにしよう．

---

* *e-mail*：hoya@shibaura-it.ac.jp

*1

転置行列 (線形代数の復習)

行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ に対し，(i,j) 成分を a_{ji} としたものを，${}^tA = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ と書き，A の**転置行列**という．

- $\ell \times m$ 行列 A，$m \times n$ 行列 B に対し，
$$ {}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA $$
- n 次正則行列 A, B に対し，
$$ (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} $$
- n 次正則行列 A に対し，
$$ {}^t(A^{-1}) = ({}^tA)^{-1} $$
(転置と逆行列を取る操作は交換可能)

なお，上に書いた ϕ が群同型であることの証明にはここに述べた行列の転置および逆行列をとる操作に関する一般的な性質しか用いていないので，一般に 2 以上の自然数 n に対し，

$$ \phi\colon GL_n(\mathbb{C}) \to GL_n(\mathbb{C}),\ A \mapsto ({}^tA)^{-1} $$

が群同型であることが全く同じ議論によりわかる． □

問題 2

G を位数 9 の群，G' を位数 6 の群，$\phi\colon G \to G'$ を群準同型とする．ある元 $g \in G$ が存在して，

$$ \phi(g) \neq e' $$

となるとき，$\operatorname{Ker}\phi$ の位数を求め，半角数字で入力せよ．ここで，e' は G' の単位元である．

問題 2 解答例． 3 □

問題 2 補足解説． $\operatorname{Ker}\phi$ は G の (正規) 部分群であったので (第 10 回講義資料命題 8.3 (2))，ラグランジュの定理の系 (第 9 回講義資料系 7.3 (1)) より，$\operatorname{Ker}\phi$ の位数 $|\operatorname{Ker}\phi|$ は $|G| = 9$ の約数である．よって，$|\operatorname{Ker}\phi|$ は

$$ 1, 3, 9 $$

のいずれかである．

まず $|\operatorname{Ker}\phi| = 1$ とすると，$\operatorname{Ker}\phi = \{e\}$ となるのでこのとき ϕ は単射である (第 10 回講義資料命題 8.4 (2))．しかし，G' の位数は G の位数よりも小さいため，ϕ は単射ではあり得ない．よって，$|\operatorname{Ker}\phi| \neq 1$.

次に $|\operatorname{Ker}\phi| = 9$ とすると，$\operatorname{Ker}\phi = G$ となるが，$\phi(g) \neq e'$ となる $g \in G$ が存在することより，$\operatorname{Ker}\phi \neq G$ (核の定義より $g \notin \operatorname{Ker}\phi$)．よって，$|\operatorname{Ker}\phi| \neq 9$.

以上より，$|\operatorname{Ker}\phi| = 3$ である． □

本問のような状況の具体例としては，

$$ \phi\colon \mathbb{Z}/9\mathbb{Z} \to D_3,\ [m]_9 \mapsto \sigma^m $$

等がある．このとき，

$$ \operatorname{Ker}\phi = \{[0]_9, [3]_9, [6]_9\} $$

である． □

問題 3

以下の 2 つの群が同型であるかどうかを判定せよ．

- 加法群 $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$
- 4 次対称群 $\mathfrak{S}_4$ の部分群

$$V = \{e, (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\}.$$

(この群 V はクラインの 4 元群と呼ばれるのであった．第 9 回復習レポート課題解答問題 4 補足解説に乗積表も記載されているので参考にすること．)

問題 3 解答例. 同型でない □

問題 3 補足解説. クラインの 4 元群 V の任意の元 $g \in V$ は $g^2 = e$ を満たす．これは，単位元以外の元が互いに素な長さ 2 の巡回置換の合成で書かれていることからわかる (乗積表は第 9 回復習レポート課題解答問題 4 補足解説参照)．一方，$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ の元 $[1]_4$ は $[1]_4 + [1]_4 = [2]_4 \neq [0]_4$ を満たす．よって，準同型 $\phi\colon \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \to V$ が存在したとすると，

$$\phi([2]_4) = \phi([1]_4 + [1]_4) = \phi([1]_4)\phi([1]_4) = \phi([1]_4)^2 = e = \phi([0]_4)$$

となり，ϕ は単射とはならない (最後の等式は第 10 回講義資料命題 8.2 (1) より)．よって，同型写像 $\phi\colon \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \to V$ は存在し得ないので，$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ と V は同型ではない． □

2 つの群 G, G' が同型でないことを示すためには，上の証明のように「どう頑張っても同型 $\phi\colon G \to G'$ は構成できない」ということを述べる必要がある．「何か同型を与えそうな写像 $\phi\colon G \to G'$ を 1 つ具体的に持ってきて，それが同型でないことを示す」というだけでは同型でないことの証明にはなっていないので注意が必要である (問題 5 補足解説も参照せよ)．

一般に群同型 $\phi\colon G \to G'$ が存在するとき，以下のようになる．

(1) $|G| = |G'|$.

(2) 任意の $g \in G$ に対し，$\operatorname{ord} g = \operatorname{ord} \phi(g)$.

これより，同型 $\phi\colon G \to G'$ が存在するとき，同型写像で対応する元同士の位数は等しくなる．V の単位元以外の元の位数は全て 2 である一方 $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ は位数 4 の元 $[1]_4, [3]_4$ を含むため，これらの間に同型写像は存在し得ない．このことを指摘したのが上記の証明となっている． □

問題 4

以下の 2 つの群が同型であるかどうかを判定せよ．

- 加法群 $\mathbb{Z}$
- 乗法群 $\mathbb{Q}^\times$ の部分群 $H = \{2^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$

問題 4 解答例. 同型である □

問題 4 補足解説. $H = \langle 2 \rangle$ で $|H| = \infty$ なので，H は無限巡回群である．よって，第 10 回講義資料定理 8.9 より，H は加法群 $\mathbb{Z}$ と同型である． □

具体的な同型写像は以下で与えられる．第 10 回講義資料例 9 の解説も参考にすること．

$$\phi\colon \mathbb{Z} \to H,\ n \mapsto 2^n.$$

□

問題 5

以下の 2 つの群が同型であるかどうかを判定せよ．

- 加法群 $\mathbb{R}$
- 乗法群 $\mathbb{R}^\times$

問題 5 解答例． 同型でない □

問題 5 補足解説． 準同型 $\phi\colon \mathbb{R}^\times \to \mathbb{R}$ が存在したとすると，

$$0 = \phi(1) = \phi((-1) \times (-1)) = \phi(-1) + \phi(-1) = 2\phi(-1)$$

となる．(最初の等式は第 10 回講義資料命題 8.2 (1) より．$\mathbb{R}$ の単位元は 0，$\mathbb{R}^\times$ の単位元は 1 であることに注意．) このとき，

$$\phi(-1) = 0 = \phi(1)$$

となるので，ϕ は単射とはならない．よって，同型写像 $\phi\colon \mathbb{R}^\times \to \mathbb{R}$ は存在し得ないので，$\mathbb{R}^\times$ と $\mathbb{R}$ は同型ではない． □

問題 3 補足解説で述べたように，2 つの群 G, G' が同型でないことを示すためには，上の証明のように「どう頑張っても同型 $\phi\colon G \to G'$ は構成できない」ということを述べる必要がある．例えば以下の説明は証明になっていない．

間違った「証明」 写像 $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^\times$，$x \mapsto e^x$ を考えると，

$$\exp(x + y) = e^{x+y} = e^x e^y = \exp(x)\exp(y)$$

なので，$\exp$ は準同型である．しかし，任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して $e^x > 0$ なので，$\exp$ の像 $\operatorname{Im}\exp$ に負の数は含まれないため，$\exp$ は全射ではない．よって，$\exp$ は同型でないので，$\mathbb{R}$ と $\mathbb{R}^\times$ は同型ではない． □

この「証明」では「$\exp$ 以外のものを考えて全単射準同型が作れる」という可能性をつぶし切れていない．このように「何か同型を与えそうな写像 $\phi\colon G \to G'$ を 1 つ具体的に持ってきて，それが同型でないことを示す」というだけでは同型でないことの証明にはなっていないのである．

問題 3 補足解説で述べたように，同型 $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^\times$ が存在するならば，同型写像で対応する元同士の位数は等しくなる．加法群 $\mathbb{R}$ の 0 以外の元は全て位数無限 (何度か足して 0 になるならもともと 0 しかあり得ない) であるが，$\mathbb{R}^\times$ は位数 2 の元 -1 を含むので，これらは同型にはなりえない．この点を指摘すれば良い．ちなみに加法群 $\mathbb{R}$ と乗法群 $\mathbb{R}_{>0}$ は同型であったということも合わせて思い出しておこう (第 10 回講義資料例 5)． □