代数学 I 第 13 回復習レポート課題解答例

担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)*

問題 1

以下の写像のうち加法群 $\mathbb{R}$ の $\mathbb{R}^2$ 上の作用を定めているものを<u>全て選択</u>せよ.

(1) $\psi_1 \colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ \left(r, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) \mapsto \begin{pmatrix} x + ry \\ y \end{pmatrix}$.

(2) $\psi_2 \colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ \left(r, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) \mapsto \begin{pmatrix} x + ry \\ 2^r y \end{pmatrix}$.

(3) $\psi_3 \colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ \left(r, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) \mapsto \begin{pmatrix} 2^{-r} x \\ 2^r y \end{pmatrix}$.

問題 1 解答例. (1), (3) □

問題 1 補足解説. 写像

$$\psi \colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

が $\mathbb{R}^2$ 上の加法群 $\mathbb{R}$ の作用であるとは，この写像が次の 2 条件を満たしているということであった (第 13 回講義資料定義 11.1).

(i) 任意の $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2$ に対し，$\psi\left(0, \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)\right) = \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$.

(ii) 任意の $r_1, r_2 \in \mathbb{R}, \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2$ に対し，$\psi\left(r_1 + r_2, \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)\right) = \psi\left(r_1, \psi\left(r_2, \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)\right)\right)$.

よって，ψ_1, ψ_2, ψ_3 についてこの (i), (ii) の条件を確認すれば良い.

<u>(1)</u> (i) の条件：任意の $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2$ に対し，

$$\psi_1\left(0, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x + 0 \cdot y \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

より，(i) の条件は満たされる.

(ii) の条件：任意の $r_1, r_2 \in \mathbb{R}, \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2$ に対し，

$$\begin{aligned}\psi_1\left(r_1 + r_2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} x + (r_1 + r_2)y \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x + r_2 y) + r_1 y \\ y \end{pmatrix} \\ &= \psi_1\left(r_1, \begin{pmatrix} x + r_2 y \\ y \end{pmatrix}\right) = \psi_1\left(r_1, \psi_1\left(r_2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)\right)\end{aligned}$$

より，(ii) の条件も満たされる.

よって，ψ_1 は $\mathbb{R}^2$ 上の加法群 $\mathbb{R}$ の作用である.

<u>(2)</u> $r_1, r_2 \in \mathbb{R}, \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2$ に対し，

$$\psi_2\left(r_1 + r_2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x + (r_1 + r_2)y \\ 2^{r_1 + r_2} y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + r_2 y + r_1 y \\ 2^{r_1 + r_2} y \end{pmatrix}$$

$$\psi_2\left(r_1, \psi_2\left(r_2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)\right) = \psi_2\left(r_1, \begin{pmatrix} x + r_2 y \\ 2^{r_2} y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x + r_2 y + 2^{r_2} r_1 y \\ 2^{r_1 + r_2} y \end{pmatrix}$$

* *e-mail*：hoya@shibaura-it.ac.jp

となる．$r_1 \neq 0, r_2 \neq 0, y \neq 0$ のとき，これらは第 1 成分が一致しないので，作用の定義条件 (ii) を満たさない．よって，ψ_2 は $\mathbb{R}^2$ 上の加法群 $\mathbb{R}$ の作用ではない．(なお，作用の定義条件 (i) は満たしている．)

(3) (i) の条件：任意の $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2$ に対し，

$$\psi_3\left(0, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2^0 x \\ 2^0 y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

より，(i) の条件は満たされる．

(ii) の条件：任意の $r_1, r_2 \in \mathbb{R}, \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2$ に対し，

$$\psi_3\left(r_1 + r_2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2^{-(r_1+r_2)} x \\ 2^{r_1+r_2} y \end{pmatrix} = \psi_3\left(r_1, \begin{pmatrix} 2^{-r_2} x \\ 2^{r_2} y \end{pmatrix}\right) = \psi_3\left(r_1, \psi_3\left(r_2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)\right)$$

より，(ii) の条件も満たされる．

よって，ψ_3 は $\mathbb{R}^2$ 上の加法群 $\mathbb{R}$ の作用である． □

問題 2

$\mathfrak{S}_3$ 上の $\mathfrak{S}_3$ の作用

$$\mathfrak{S}_3 \times \mathfrak{S}_3 \to \mathfrak{S}_3,\ (\sigma, \sigma') \mapsto \sigma \cdot \sigma' := \sigma\sigma'\sigma^{-1}$$

を考える (第 13 回講義資料例 7 参照)．**特にこの $\cdot$ は上で定義される作用を表すもので，$\mathfrak{S}_3$ における二項演算ではないことに注意**．このとき，この作用に関する $(1\ 2)$ の $\mathfrak{S}_3$-軌道

$$\mathfrak{S}_3 \cdot (1\ 2)$$

に含まれる元を以下から全て選択せよ．

(a) e
(b) $(1\ 2)$
(c) $(1\ 3)$
(d) $(2\ 3)$
(e) $(1\ 2\ 3)$
(f) $(1\ 3\ 2)$

問題 2 解答例. (b), (c), (d) □

問題 2 補足解説. 作用と $\mathfrak{S}_3$-軌道の定義より，

$$\mathfrak{S}_3 \cdot (1\ 2) = \{\sigma \cdot (1\ 2) \mid \sigma \in \mathfrak{S}_3\} = \{\sigma(1\ 2)\sigma^{-1} \mid \sigma \in \mathfrak{S}_3\}$$

となるので，各 $\sigma \in \mathfrak{S}_3$ に対して $\sigma(1\ 2)\sigma^{-1}$ を計算し，現れる項を全て選択すれば良い．しかし，ここでは復習を兼ねて，第 5 回復習レポート課題解答例問題 1 補足解説において証明した以下の定理を用いて計算してみよう．

定理

任意の n 次対称群の元 $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ に対し，以下が成立する．

(1) $\sigma \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix} \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \\ \sigma(i_1) & \sigma(i_2) & \cdots & \sigma(i_n) \end{pmatrix}$.

(2) $\sigma \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix} \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \sigma(i_1) & \sigma(i_2) & \cdots & \sigma(i_n) \end{pmatrix}$.

定理 (2) より，任意の $\sigma \in \mathfrak{S}_3$ に対して，

$$\sigma(1\ 2)\sigma^{-1} = (\sigma(1)\ \sigma(2)).$$

ここで，任意の $1 \leq i, j \leq 3, i \neq j$ に対して，$\sigma(1) = i, \sigma(2) = j$ を満たす $\sigma \in \mathfrak{S}_3$ は存在するので，任意の $\mathfrak{S}_3$ における互換は上の右辺の形で表示できる．よって，

$$\mathfrak{S}_3 \cdot (1\ 2) = \{\sigma(1\ 2)\sigma^{-1} \mid \sigma \in \mathfrak{S}_3\} = \{(\sigma(1)\ \sigma(2)) \mid \sigma \in \mathfrak{S}_3\} = \{(1\ 2), (1\ 3), (2\ 3)\}$$

となる ($i \neq j$ のとき，$(i\ j) = (j\ i)$ であることに注意). □

問題 3

再び問題 2 で考えた作用

$$\mathfrak{S}_3 \times \mathfrak{S}_3 \to \mathfrak{S}_3,\ (\sigma, \sigma') \mapsto \sigma \cdot \sigma' := \sigma\sigma'\sigma^{-1}$$

を考える．このとき，$(1\ 2) \in \mathfrak{S}_3$ における固定部分群

$$(\mathfrak{S}_3)_{(1\ 2)}$$

に含まれる元を以下から全て選択せよ．

(a) e
(b) $(1\ 2)$
(c) $(1\ 3)$
(d) $(2\ 3)$
(e) $(1\ 2\ 3)$
(f) $(1\ 3\ 2)$

問題 3 解答例. (a), (b) □

問題 3 補足解説. 作用と $(1\ 2) \in \mathfrak{S}_3$ における固定部分群の定義より，

$$(\mathfrak{S}_3)_{(1\ 2)} = \{\sigma \in \mathfrak{S}_3 \mid \sigma \cdot (1\ 2) = (1\ 2)\} = \{\sigma \in \mathfrak{S}_3 \mid \sigma(1\ 2)\sigma^{-1} = (1\ 2)\}$$

となるので，各 $\sigma \in \mathfrak{S}_3$ に対して $\sigma(1\ 2)\sigma^{-1}$ を計算し，この結果が再び $(1\ 2)$ となるような σ を全て選択すれば良い．ここで，問題 2 補足解説で復習した定理の (2) を用いると，

$$\sigma(1\ 2)\sigma^{-1} = (\sigma(1)\ \sigma(2))$$

であったので，これが $(1\ 2)$ に一致するのは，

- $\sigma(1) = 1, \sigma(2) = 2$
- $\sigma(1) = 2, \sigma(2) = 1$

のいずれかのときである．ここで，$\mathfrak{S}_3$ の元は全単射写像 $\{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\}$ であるから，上記のいずれの場合も $\sigma(3) = 3$ である．よって，

$$(\mathfrak{S}_3)_{(1\ 2)} = \{e, (1\ 2)\}.$$

□

軌道・固定群定理より，

$$\mathfrak{S}_3/(\mathfrak{S}_3)_{(1\ 2)} \to \mathfrak{S}_3 \cdot (1\ 2),\ \sigma(\mathfrak{S}_3)_{(1\ 2)} \mapsto \sigma \cdot (1\ 2) = \sigma(1\ 2)\sigma^{-1}$$

は全単射写像であったことも合わせて思い出そう．実際，問題 2 の結果と合わせると，元の個数も

$$|\mathfrak{S}_3/(\mathfrak{S}_3)_{(1\ 2)}| = \frac{|\mathfrak{S}_3|}{|(\mathfrak{S}_3)_{(1\ 2)}|} = \frac{3!}{2} = 3, \qquad |\mathfrak{S}_3 \cdot (1\ 2)| = 3$$

となり，つじつまが合っている．この考察は固定部分群の元 (あるいは $\mathfrak{S}_3$-軌道の元) に数え忘れがないかどうかの検算に使える． □

問題 4

再び問題 2 で考えた作用

$$\mathfrak{S}_3 \times \mathfrak{S}_3 \to \mathfrak{S}_3,\ (\sigma, \sigma') \mapsto \sigma \cdot \sigma' := \sigma\sigma'\sigma^{-1}$$

を考える．この作用に関して $\mathfrak{S}_3$ を軌道分解したとき，現れる $\mathfrak{S}_3$-軌道の数を求め，半角数字で入力せよ．

問題 4 解答例． 3 □

問題 4 補足解説． $\mathfrak{S}_3$ を $\mathfrak{S}_3$-軌道の交わりを持たない合併 (非交和) として書く方法がわかるまで $\mathfrak{S}_3$-軌道を求め続ける．(非交和については第 9 回講義資料 p.2 注釈を参照．$\coprod$ という記号を用いるのであった．) 単位元 e の $\mathfrak{S}_3$-軌道は，

$$\mathfrak{S}_3 \cdot e = \{\sigma \cdot e \mid \sigma \in \mathfrak{S}_3\} = \{\sigma e \sigma^{-1} \mid \sigma \in \mathfrak{S}_3\} = \{e\}$$

となる．また，問題 2 より，

$$\mathfrak{S}_3 \cdot (1\ 2) = \{(1\ 2), (1\ 3), (2\ 3)\}$$

であった．そこでここまで求めた軌道に現れていない元として $(1\ 2\ 3) \in \mathfrak{S}_3$ を取り，その $\mathfrak{S}_3$-軌道を求める．問題 2 補足解説で復習した定理の (2) から，

$$\begin{aligned}
\mathfrak{S}_3 \cdot (1\ 2\ 3) &= \{\sigma \cdot (1\ 2\ 3) \mid \sigma \in \mathfrak{S}_3\} \\
&= \{\sigma(1\ 2\ 3)\sigma^{-1} \mid \sigma \in\in \mathfrak{S}_3\} \\
&= \{(\sigma(1)\ \sigma(2)\ \sigma(3)) \mid \sigma \in \mathfrak{S}_3\} \\
&= \{(1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}.
\end{aligned}$$

ここで，相異なる $1 \leq i, j, k \leq 3$ に対して，$(i\ j\ k) = (j\ k\ i) = (k\ i\ j)$ であることに注意する．

以上で全ての $\mathfrak{S}_3$ の元がここまでに求めた $\mathfrak{S}_3$-軌道のいずれかに現れたので，$\mathfrak{S}_3$ の軌道分解が

$$\mathfrak{S}_3 = \mathfrak{S}_3 \cdot e \cup \mathfrak{S}_3 \cdot (1\ 2) \cup \mathfrak{S}_3 \cdot (1\ 2\ 3)$$

となることがわかる．よって，求める $\mathfrak{S}_3$-軌道の数は 3 個である． □

今回考えた $\mathfrak{S}_3$ の作用は $\mathfrak{S}_3$ の随伴作用と呼ばれるものである (第 13 回講義資料例 7)．一般の群 G に対して，随伴作用に関する G-軌道は**共役類**と呼ばれる (補足資料「代数学 I Extra 講義資料」定義 12.1 参照)．

上記計算から類推されるように，一般に $\mathfrak{S}_n$ の共役類は，$\mathfrak{S}_n$ の元をどの 2 つも互いに素な巡回置換の合成として書いた時の「形」が同じになるものをまとめたものである．この「形」を**サイクルタイプ**と呼ぶ．$\mathfrak{S}_3$ におけるサイクルタイプの種類は

$$e\ \text{型},\quad (i\ j)\ \text{型},\quad (i\ j\ k)\ \text{型}$$

の 3 通りなので，3 つの共役類があるということになる．このあたりのことは補足資料「代数学 I Extra 講義資料」の例 2 で詳しく説明されているので一般化に興味のある方は是非読んでいただきたい． □

問題 5

3 次二面体群 D_3 の集合 X 上の作用 $D_3 \times X \to X$ が与えられているとする．X の元の個数が 7 個であり，この作用によって X がちょうど 2 つの D_3-軌道に分解されるとき，2 つの軌道に含まれる元の個数をそれぞれ求め，半角数字でコンマで区切って入力せよ．
(元の個数が a 個の D_3-軌道 O_1 と元の個数が b 個の D_3-軌道 O_2 によって，$X = O_1 \coprod O_2$ となると考えたとき，「a, b」と解答する．a, b の順は問わない．)

問題 5 解答例． $1, 6$ □

問題 5 補足解説． 作用 $D_3 \times X \to X$ を $(g, x) \mapsto g \cdot x$ と表記する．$x \in X$ とすると，軌道・固定群定理とラグランジュの定理より，

$$|D_3 \cdot x| = |D_3/(D_3)_x| = \frac{|D_3|}{|(D_3)_x|} = \frac{6}{|(D_3)_x|}$$

となるので，D_3-軌道 $D_3 \cdot x$ の元の個数は 6 の約数

$$1,\ 2,\ 3,\ 6$$

のいずれかである．ここで，X はちょうど 2 つの D_3-軌道に分解されているので，その 2 つの D_3-軌道の元の個数を a, b とすると，

$$a + b = |X| = 7$$

である．a, b が $1, 2, 3, 6$ のいずれかの場合，これをみたすのは a, b が $1, 6$ の組み合わせのときのみである．よって，求める D_3-軌道の元の個数は $1, 6$. □

一般に有限群 G の集合 X への作用 $G \times X \to X,\ (g, x) \mapsto g \cdot x$ が与えられているとき，軌道・固定群定理とラグランジュの定理より，各 $x \in G$ に対して，

$$|G \cdot x| = |G/G_x| = \frac{|G|}{|G_x|}$$

となるので，G-軌道の元の個数は G の位数 $|G|$ の約数となることに注意しよう． □