代数学 I 期末試験

(試験時間：75 分)

担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)

- 問題は $\boxed{1}$ から $\boxed{6}$ までの 6 問で 100 点満点である．これに加えて $\boxed{\text{Extra}}$ が 40 点分あるので，計 140 点となるが，100 点を超えた場合には切り捨てて 100 点を期末試験の点数とする.
- 答えのみで良い問題であっても，解答の手順が書いてあった場合，部分点を与える**可能性**がある．ただし，解答の過程を書く場合，最終的な答えがどれなのかを明確に記すようにすること.
- 解答は日本語または英語で行うこと．また，どの問の解答であるかを明確に記したうえで解答すること.
- 名前，学籍番号の書き忘れには十分注意すること．特に解答用紙を 2 枚以上用いた場合にはその両方に名前，学籍番号が記載されていることを確認すること．記載されていない場合，採点は行わない.

記号の約束.

- n 次対称群を $\mathfrak{S}_n$ と書く.
- n 次二面体群を D_n と書く．また，D_n の元を
$$D_n = \{e, \sigma, \sigma^2, \dots, \sigma^{n-1}, \tau, \sigma\tau, \sigma^2\tau, \dots, \sigma^{n-1}\tau\}$$
と書く．ただし $\sigma^n = e, \tau^2 = e, \tau\sigma = \sigma^{-1}\tau$ とする.
- 実数成分 n 次正則行列のなす n 次一般線形群を $GL_n(\mathbb{R})$ と書く.
- 正方行列 A に対し，その行列式を $\det A$ と書く.
- $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ は通常の方法で加法群であると考え，$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ は通常の方法で乗法群であると考える.

$\boxed{1}$ (10 点)

(1) G を群，H を G の部分群とする．このとき，H が G の**正規部分群**であるとは H がどのような条件を満たすことであるか述べよ.

(2) 写像 $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}^\times$ が加法群 $\mathbb{R}$ から乗法群 $\mathbb{C}^\times$ への**群準同型**であるとは，ϕ がどのような条件を満たすことであるか述べよ.

(3) G を群，X を集合とする．写像 $\psi\colon G \times X \to X$ が **X 上の G の作用**であるとは，ψ がどのような条件を満たすことであるか述べよ.

$\boxed{2}$ (15 点)

(1) D_8 の元 σ^6 の位数を求めよ．解答は答えのみで良い．

(2) $\mathfrak{S}_7$ の元 $(1\ 2\ 3\ 4)(5\ 6\ 7)$ の位数を求めよ．解答は答えのみで良い．

(3) 以下の D_6 の部分集合 S のうち，S が生成する D_6 の部分群 $\langle S \rangle$ が D_6 に一致するもの (すなわち $D_6 = \langle S \rangle$ となるもの) を 全て選択 せよ．

(a) $S = \{\sigma^2, \tau\}$
(b) $S = \{\sigma^2, \sigma^3, \tau\}$
(c) $S = \{\sigma, \sigma^2\tau\}$
(d) $S = \{\sigma^2, \sigma\tau\}$
(e) $S = D_6$

$\boxed{3}$ (25 点)

(1) $\mathfrak{S}_4$ の部分群

$$H = \langle (1\ 2\ 3) \rangle$$

を考える．このとき $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ の H による左剰余類

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} H$$

に含まれる元を全て挙げよ．ただし，元は $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ i & j & k & \ell \end{pmatrix}$ という 2 行配列のという形で挙げよ．解答は答えのみで良い．

(2) D_4 の部分群

$$H = \{e, \sigma^2\}$$

を考える．このとき，以下の D_4 の部分集合の中から D_4 の H に関する左完全代表系であるものを全て選択せよ．

(a) $\{\sigma, \tau\}$
(b) $\{e, \sigma, \tau, \sigma\tau\}$
(c) $\{e, \sigma^2, \sigma\tau, \sigma^3\tau\}$
(d) $\{\sigma, \sigma^2, \tau, \sigma^3\tau\}$
(e) D_4

(3) D_6 とその部分群

$$H = \langle \sigma^2 \rangle$$

を考える．このとき，H の D_6 における指数 $(D_6 : H)$ を求めよ．解答は答えのみで良い．

(4) 2 の倍数全体のなす加法群 $2\mathbb{Z} = \{2n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ とその部分群 $6\mathbb{Z} = \{6n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ を考える．このとき，$6\mathbb{Z}$ の $2\mathbb{Z}$ における指数 $(2\mathbb{Z} : 6\mathbb{Z})$ を求めよ．解答は答えのみで良い．

(5) 群準同型 $\phi\colon D_6 \to \mathfrak{S}_3$ であって，

$$\phi(\sigma) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \phi(\tau) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

を満たすものを考える (このようなものは実際に存在する)．このとき，

$$\phi(\sigma^4\tau) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \boxed{\text{ア}} & \boxed{\text{イ}} & \boxed{\text{ウ}} \end{pmatrix}$$

である．$\boxed{\text{ア}}$, $\boxed{\text{イ}}$, $\boxed{\text{ウ}}$に入る数字を求めよ．解答は答えのみで良い.

$\boxed{4}$ (12 点) 以下の (1)〜(4) の群 G とその部分集合 H のそれぞれについて，H が G の

(a) 正規部分群である．　(b) 部分群であるが正規部分群ではない．　(c) 部分群でない.

のいずれであるかそれぞれ判定せよ．解答は答えのみで良い.

(1) $G = \mathfrak{S}_3,\ H = \{e, (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$

(2) $G = D_4,\ H = \{e, \sigma\tau\}$

(3) $G = GL_2(\mathbb{R}),\ H = \{A \in GL_2(\mathbb{R}) \mid \det(A) \in \mathbb{Z}\}$

(4) $G = GL_2(\mathbb{R}),\ H = \{A \in GL_2(\mathbb{R}) \mid \det(A) \in \mathbb{R}_{>0}\}$

$\boxed{5}$ (18 点) 以下の問いに答えよ．ただし，解答は「同型である」,「同型でない」のいずれかを答えるだけで良い.

(1) 以下の 2 つの群が同型であるかどうかを判定せよ.
- $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$
- D_3

(2) 以下の 2 つの群が同型であるかどうかを判定せよ.
- $\mathfrak{S}_3$
- $\mathfrak{S}_4$ の部分群 $H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ i & j & k & 4 \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_4 \;\middle|\; i, j, k \text{ は } 1, 2, 3 \text{ の並べ替え} \right\}$

(3) 以下の 2 つの群が同型であるかどうかを判定せよ.
- $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$
- $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^\times$

(4) 以下の 2 つの群が同型であるかどうかを判定せよ.
- $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$
- $\mathfrak{S}_4$ の部分群 $V = \{e, (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\}$ (クラインの 4 元群)

(5) 以下の 2 つの群が同型であるかどうかを判定せよ.
- $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^\times$
- D_6 の正規部分群 $N = \langle\sigma\rangle$ を考えたときの剰余群 D_6/N

(6) 以下の 2 つの群が同型であるかどうかを判定せよ.
- $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$
- $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$

$\boxed{6}$ (20 点)

(1) G を位数 15 の群，g を G の元とする．g^6 が e とも g とも異なる元であるとき (e は G の単位元)，g の位数を求めよ．なお，解答においては考察の過程も説明すること.

(2) G を位数 12 の群，G' を位数 15 の群，$\phi\colon G \to G'$ を群準同型とする．ある元 $g \in G$ が存在して，

$$\phi(g) \neq e'$$

となるとき，$\mathrm{Ker}\,\phi$ の位数を求めよ．ここで，e' は G' の単位元である．なお，解答においては考察の過程も説明すること.

(3) $\mathfrak{S}_5$ の集合 X 上の作用 $\mathfrak{S}_5 \times X \to X$ が定まっているとする．ある $x \in X$ において，その $\mathfrak{S}_5$-軌道 $\mathfrak{S}_5 \cdot x$ の元の個数が 12 であるとき，固定部分群 $(\mathfrak{S}_5)_x$ の位数を求めよ．なお，解答においては考察の過程も説明すること.

$\boxed{\text{Extra}}$ (40 点)

(1) 写像

$$\phi\colon \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}^\times,\ z \mapsto z^4$$

が乗法群 $\mathbb{C}^\times$ から乗法群 $\mathbb{C}^\times$ への群準同型であることを証明せよ．また，$\mathrm{Ker}\,\phi$ を求めよ (元を具体的に全て求めること)．こちらの解答は答えのみでよい.

(2) D_5 の部分群を全て求めよ．解答は答えのみで良い.

(3) $GL_2(\mathbb{R})$ の部分集合

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; c = 0 \right\}$$

が $GL_2(\mathbb{R})$ の

(a) 正規部分群である．　(b) 部分群であるが正規部分群ではない．　(c) 部分群でない.

のいずれであるかを判定し，その理由を説明せよ.

(4) $\phi\colon G \to H$ を群準同型とする．このとき，写像

$$\psi\colon G \times H \to H,\ (g,h) \mapsto \phi(g)h$$

が H 上の G の作用を定めることを証明せよ．また，任意の $h \in H$ に対し，h における固定部分群 G_h は G の正規部分群となることを証明せよ.

(5) $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ と $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ が同型でないことを証明せよ．ただし，「中国式剰余定理より明らか.」に類する記述は証明とはみなさない.

(6) 加法群 $\mathbb{Q}$ と乗法群 $\mathbb{Q}_{>0}$ が同型でないことを証明せよ.

(7) G を位数 25 の群とする．このとき，G には単位元以外の元 $z \in G$ で，任意の $g \in G$ に対して $gz = zg$ を満たすものが存在することを証明せよ．(ヒント：G 上の G の作用 $G \times G \to G, (g,h) \mapsto ghg^{-1}$ を考え，この作用 (随伴作用) による G の軌道分解を考える．)

問題は以上である．