代数学 I 期末試験解答例

担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)*

問題 1

(1) G を群，H を G の部分群とする．このとき，H が G の**正規部分群**であるとは H がどのような条件を満たすことであるか述べよ．

(2) 写像 $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}^\times$ が加法群 $\mathbb{R}$ から乗法群 $\mathbb{C}^\times$ への**群準同型**であるとは，ϕ がどのような条件を満たすことであるか述べよ．

(3) G を群，X を集合とする．写像 $\psi\colon G \times X \to X$ が **X 上の G の作用**であるとは，ψ がどのような条件を満たすことであるか述べよ．

問題 1 解答例.

(1) 任意の $g \in G$ に対して，$gHg^{-1} \coloneqq \{ghg^{-1} \mid h \in H\} \subset H$.

(2) 任意の $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ に対して，$\phi(r_1 + r_2) = \phi(r_1)\phi(r_2)$.

(3) $\begin{cases} \text{(i) 任意の } x \in X \text{ に対し，} \psi(e, x) = x\text{．ただし，} e \text{ は } G \text{ の単位元.} \\ \text{(ii) 任意の } g, h \in G, x \in X \text{ に対し，} \psi(gh, x) = \psi(g, \psi(h, x)). \end{cases}$ □

問題 2

(1) D_8 の元 σ^6 の位数を求めよ．<u>解答は答えのみで良い.</u>

(2) $\mathfrak{S}_7$ の元 $(1\ 2\ 3\ 4)(5\ 6\ 7)$ の位数を求めよ．<u>解答は答えのみで良い.</u>

(3) 以下の D_6 の部分集合 S のうち，S が生成する D_6 の部分群 $\langle S \rangle$ が D_6 に一致するもの (すなわち $D_6 = \langle S \rangle$ となるもの) を <u>全て選択</u> せよ．
 (a) $S = \{\sigma^2, \tau\}$
 (b) $S = \{\sigma^2, \sigma^3, \tau\}$
 (c) $S = \{\sigma, \sigma^2\tau\}$
 (d) $S = \{\sigma^2, \sigma\tau\}$
 (e) $S = D_6$

問題 2 解答例.

(1) 4

(2) 12

(3) (b), (c), (e) □

問題 2 補足解説.

(1), (2) 第 6 回復習レポート課題問題 4, 5 補足解説参照.

(3) 第 6 回復習レポート課題問題 2 補足解説参照．なお,

$$\langle\{\sigma^2, \tau\}\rangle = \{e, \sigma^2, \sigma^4, \tau, \sigma^2\tau, \sigma^4\tau\}, \qquad \langle\{\sigma^2, \sigma\tau\}\rangle = \{e, \sigma^2, \sigma^4, \sigma\tau, \sigma^3\tau, \sigma^5\tau\}.$$

* *e-mail*：hoya@shibaura-it.ac.jp

□

問題 3

(1) $\mathfrak{S}_4$ の部分群

$$H = \langle (1\ 2\ 3) \rangle$$

を考える．このとき $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ の H による左剰余類

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} H$$

に含まれる元を全て挙げよ．ただし，元は $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ i & j & k & \ell \end{pmatrix}$ という 2 行配列のという形で挙げよ．解答は答えのみで良い．

(2) D_4 の部分群

$$H = \{e, \sigma^2\}$$

を考える．このとき，以下の D_4 の部分集合の中から D_4 の H に関する左完全代表系であるものを全て選択せよ．

(a) $\{\sigma, \tau\}$
(b) $\{e, \sigma, \tau, \sigma\tau\}$
(c) $\{e, \sigma^2, \sigma\tau, \sigma^3\tau\}$
(d) $\{\sigma, \sigma^2, \tau, \sigma^3\tau\}$
(e) D_4

(3) D_6 とその部分群

$$H = \langle \sigma^2 \rangle$$

を考える．このとき，H の D_6 における指数 $(D_6 : H)$ を求めよ．解答は答えのみで良い．

(4) 2 の倍数全体のなす加法群 $2\mathbb{Z} = \{2n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ とその部分群 $6\mathbb{Z} = \{6n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ を考える．このとき，$6\mathbb{Z}$ の $2\mathbb{Z}$ における指数 $(2\mathbb{Z} : 6\mathbb{Z})$ を求めよ．解答は答えのみで良い．

(5) 群準同型 $\phi\colon D_6 \to \mathfrak{S}_3$ であって，

$$\phi(\sigma) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \phi(\tau) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

を満たすものを考える (このようなものは実際に存在する)．このとき，

$$\phi(\sigma^4\tau) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \boxed{\text{ア}} & \boxed{\text{イ}} & \boxed{\text{ウ}} \end{pmatrix}$$

である．$\boxed{\text{ア}}$, $\boxed{\text{イ}}$, $\boxed{\text{ウ}}$ に入る数字を求めよ．解答は答えのみで良い．

問題 3 解答例.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$

(2) (b), (d)

(3) 4

(4) 3

(5) $\phi(\sigma^4\tau) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ □

問題 3 補足解説.

(1) 第 8 回復習レポート課題問題 2, 3 補足解説参照.

(2) D_4 を H に関する左剰余類によって分割すると,

$$eH = \{e, \sigma^2\} \qquad \sigma H = \{\sigma, \sigma^3\} \qquad \tau H = \{\tau, \sigma^2\tau\} \qquad \sigma\tau H = \{\sigma\tau, \sigma^3\tau\}$$

なので,

$$D_4 = eH \cup \sigma H \cup \tau H \cup \sigma\tau H$$

となる．よって，本問の選択肢の中で $eH, \sigma H, \tau H, \sigma\tau H$ のそれぞれからちょうど 1 つずつ元を抜き出して得られている集合を選べば良い．第 8 回復習レポート課題問題 4 補足解説も参照のこと.

(3) 第 8 回復習レポート課題問題 5 補足解説，第 9 回復習レポート課題問題 1 補足解説参照.

(4) $2\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} = \{[2k]_6 \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{[0]_6, [2]_6, [4]_6\}$ となるので，$(2\mathbb{Z} : 6\mathbb{Z}) = |2\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}| = 3$.

(5)

$$\phi(\sigma^4\tau) = \phi(\sigma)^4\phi(\tau) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}^4 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

□

問題 4

以下の (1)〜(4) の群 G とその部分集合 H のそれぞれについて，H が G の

(a) 正規部分群である．　(b) 部分群であるが正規部分群ではない．　(c) 部分群でない.

のいずれであるかそれぞれ判定せよ．解答は答えのみで良い.

(1) $G = \mathfrak{S}_3,\ H = \{e, (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$

(2) $G = D_4,\ H = \{e, \sigma\tau\}$

(3) $G = GL_2(\mathbb{R}),\ H = \{A \in GL_2(\mathbb{R}) \mid \det(A) \in \mathbb{Z}\}$

(4) $G = GL_2(\mathbb{R}),\ H = \{A \in GL_2(\mathbb{R}) \mid \det(A) \in \mathbb{R}_{>0}\}$

問題 4 解答例.

(1) (a)

(2) (b)

(3) (c)

(4) (a) □

問題 4 補足解説.

(1) $H = \langle(1\ 2\ 3)\rangle$ となるので，H は $\mathfrak{S}_3$ の部分群である．さらに，任意の $\sigma \in \mathfrak{S}_3$ に対し,

$$\sigma e\sigma^{-1} = e \in H \qquad \sigma(1\ 2\ 3)\sigma^{-1} = (\sigma(1)\ \sigma(2)\ \sigma(3)) \in H \qquad \sigma(1\ 3\ 2)\sigma^{-1} = (\sigma(1)\ \sigma(3)\ \sigma(2)) \in H$$

となる (第 5 回復習レポート課題解答例問題 1 補足解説参照)．ここで，$\mathfrak{S}_3$ における長さ 3 の巡回置換は全て H に含まれていることに注意する．よって，H は $\mathfrak{S}_3$ の正規部分群である.

ちなみに，この H は 3 次交代群 $\mathfrak{A}_3$ である (第 10 回講義資料定義 8.8)．これを理由に H を $\mathfrak{S}_3$ の正規部分群であると判断しても良い.

(2) $H = \langle \sigma\tau \rangle$ となるので，H は D_4 の部分群である．しかし，例えば $\sigma \in D_4, \sigma\tau \in H$ に対し，

$$\sigma(\sigma\tau)\sigma^{-1} = \sigma^3\tau \notin H$$

となる．よって，H は部分群であるが正規部分群ではない．

(3) H が $GL_2(\mathbb{R})$ の部分群であるためには，任意の H の元に対して，その逆元 (=逆行列) も再び H の元である必要がある．しかし，例えば

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2 \in \mathbb{Z}$$

より，$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in H$ であるが，その逆行列 $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ は

$$\det \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$$

より，H の元でない．よって，H は $GL_2(\mathbb{R})$ の部分群ではない．

(4) $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \in \mathbb{R}_{>0}$ より，$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in H$．よって，$H$ は空ではない．任意の $A, B \in H$ に対し，

$$\det(AB) = \det(A)\det(B) \in \mathbb{R}_{>0} \qquad \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} \in \mathbb{R}_{>0}$$

より，$AB \in H$ かつ $A^{-1} \in H$ である．よって，H は $GL_2(\mathbb{R})$ の部分群である．

さらに，任意の $C \in GL_2(\mathbb{R})$，$A \in H$ に対し，

$$\det(CAC^{-1}) = \det(C)\det(A)\det(C^{-1}) = \det(C)\det(A)\frac{1}{\det(C)} = \det(A) \in \mathbb{R}_{>0}$$

となるので，$CAC^{-1} \in H$．よって，H は $GL_2(\mathbb{R})$ の正規部分群となる． □

問題 5

以下の問いに答えよ．ただし，解答は「同型である」,「同型でない」のいずれかを答えるだけで良い．

(1) 以下の 2 つの群が同型であるかどうかを判定せよ．
- $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$
- D_3

(2) 以下の 2 つの群が同型であるかどうかを判定せよ．
- $\mathfrak{S}_3$
- $\mathfrak{S}_4$ の部分群 $H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ i & j & k & 4 \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_4 \;\middle|\; i, j, k \text{ は } 1, 2, 3 \text{ の並べ替え} \right\}$

(3) 以下の 2 つの群が同型であるかどうかを判定せよ．
- $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$
- $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^\times$

(4) 以下の 2 つの群が同型であるかどうかを判定せよ．
- $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$
- $\mathfrak{S}_4$ の部分群 $V = \{e, (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\}$ (クラインの 4 元群)

(5) 以下の 2 つの群が同型であるかどうかを判定せよ．
- $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^\times$
- D_6 の正規部分群 $N = \langle \sigma \rangle$ を考えたときの剰余群 D_6/N

(6) 以下の 2 つの群が同型であるかどうかを判定せよ．
- $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$
- $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$

問題 5 解答例.

(1) 同型でない

(2) 同型である

(3) 同型である

(4) 同型でない

(5) 同型である

(6) 同型である □

問題 5 補足解説.

(1) $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ は可換群であるが，D_3 は非可換群であるのでこれらは同型でない．

(2) 写像

$$\mathfrak{S}_3 \to H,\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i & j & k \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ i & j & k & 4 \end{pmatrix}$$

が群同型を与える．

(3) $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^\times = \{[1]_5, [2]_5, [3]_5, [4]_5\}$ は $[2]_5$ によって生成される位数 4 の巡回群である．よって，この群は $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ と同型である (第 11 回講義資料定理 9.2，第 11 回復習レポート課題問題 1 補足解説参照).

(4) 第 10 回復習レポート課題問題 3 補足解説参照.

(5) $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^\times = \{[1]_4, [3]_4\}$ なので，$(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^\times$ は位数 2 の群である．一方，$(D_6 : N) = 2$ で (確認せよ)，D_6/N も位数 2 の群である．2 は素数なので，

$$(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^\times \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \simeq D_6/N$$

となる (第 11 回講義資料定理 9.3 参照).

(6) 3 と 4 は互いに素なので，中国式剰余定理より，これらは同型である (第 12 回講義資料定理 10.2 参照). □

問題 6

(1) G を位数 15 の群，g を G の元とする．g^6 が e とも g とも異なる元であるとき (e は G の単位元)，g の位数を求めよ．なお，解答においては<u>考察の過程も説明すること</u>.

(2) G を位数 12 の群，G' を位数 15 の群，$\phi\colon G \to G'$ を群準同型とする．ある元 $g \in G$ が存在して，

$$\phi(g) \neq e'$$

となるとき，$\operatorname{Ker}\phi$ の位数を求めよ．ここで，e' は G' の単位元である．なお，解答においては<u>考察の過程も説明すること</u>.

(3) $\mathfrak{S}_5$ の集合 X 上の作用 $\mathfrak{S}_5 \times X \to X$ が定まっているとする．ある $x \in X$ において，その $\mathfrak{S}_5$-軌道 $\mathfrak{S}_5 \cdot x$ の元の個数が 12 であるとき，固定部分群 $(\mathfrak{S}_5)_x$ の位数を求めよ．なお，解答においては<u>考察の過程も説明すること</u>.

問題 6 解答例.

(1) ラグランジュの定理の系より，$\operatorname{ord} g$ は $|G| = 15$ の約数である．よって，$\operatorname{ord} g$ は

$$1, 3, 5, 15$$

のいずれかである．ここで，$\operatorname{ord} g = 1$ または 3 とすると，

$$g^6 = (g^3)^2 = e$$

となるので仮定に反する．また，$\operatorname{ord} g = 5$ とすると，

$$g^6 = g^5 g = eg = g$$

となるのでやはり仮定に反する．以上より，$\operatorname{ord} g = 15$ である． □

(2) $\operatorname{Ker}\phi$ は G の部分群であったので，ラグランジュの定理より，$\operatorname{Ker}\phi$ の位数は $|G| = 12$ の約数である．よって，$|\operatorname{Ker}\phi|$ は

$$1, 2, 3, 4, 6, 12$$

のいずれかである．さらに，準同型定理より，

$$G/\operatorname{Ker}\phi \simeq \operatorname{Im}\phi$$

なので，

$$|G/\operatorname{Ker}\phi| = |\operatorname{Im}\phi|.$$

よって，ラグランジュの定理より，

$$|\operatorname{Im}\phi| = |G/\operatorname{Ker}\phi| = \frac{|G|}{|\operatorname{Ker}\phi|} = \frac{12}{|\operatorname{Ker}\phi|}$$

なので，$\operatorname{Im}\phi$ の位数は $|\operatorname{Ker}\phi|$ が $1, 2, 3, 4, 6, 12$ であるとき，順に

$$12, 6, 4, 3, 2, 1$$

となる．ここで，$\operatorname{Im}\phi$ は G' の部分群なので，再びラグランジュの定理より，$\operatorname{Im}\phi$ の位数は $|G'| = 15$ の約数である．以上の考察より，$\operatorname{Ker}\phi, \operatorname{Im}\phi$ の位数の組み合わせとしてあり得るのは，

(i) $|\operatorname{Ker}\phi| = 4, |\operatorname{Im}\phi| = 3$

(ii) $|\operatorname{Ker}\phi| = 12, |\operatorname{Im}\phi| = 1$

のいすれかである．ここで，(ii) の場合 $|\operatorname{Ker}\phi| = 12 = |G|$ なので，$\operatorname{Ker}\phi = G$ であるから，全ての $g \in G$ に対して $\phi(g) = e'$ となり，問題文にあるような $g \in G$ の存在に矛盾する．以上より，あり得るのは (i) の場合のみで，求める $\operatorname{Ker}\phi$ の位数は 4 である． □

(3) 軌道・固定群定理より，商集合 $\mathfrak{S}_5/(\mathfrak{S}_5)_x$ と $\mathfrak{S}_5$-軌道 $\mathfrak{S}_5 \cdot x$ との間には全単射写像が存在する．特にこれらの集合の元の個数は等しく，

$$|\mathfrak{S}_5/(\mathfrak{S}_5)_x| = |\mathfrak{S}_5 \cdot x| = 12.$$

ここでラグランジュの定理より，

$$|\mathfrak{S}_5/(\mathfrak{S}_5)_x| = \frac{|\mathfrak{S}_5|}{|(\mathfrak{S}_5)_x|} = \frac{5!}{|(\mathfrak{S}_5)_x|} = \frac{120}{|(\mathfrak{S}_5)_x|}.$$

これらを合わせると，

$$\frac{120}{|(\mathfrak{S}_5)_x|} = 12$$

となるので，$(\mathfrak{S}_5)_x$ の位数は $|(\mathfrak{S}_5)_x| = 10$ である． □

Extra 問題

(1) 写像
$$\phi\colon \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}^\times,\ z \mapsto z^4$$
が乗法群 $\mathbb{C}^\times$ から乗法群 $\mathbb{C}^\times$ への群準同型であることを証明せよ．また，$\operatorname{Ker}\phi$ を求めよ (元を具体的に全て求めること)．こちらの解答は答えのみでよい．

(2) D_5 の部分群を全て求めよ．解答は答えのみで良い．

(3) $GL_2(\mathbb{R})$ の部分集合
$$H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; c = 0 \right\}$$
が $GL_2(\mathbb{R})$ の

(a) 正規部分群である．　(b) 部分群であるが正規部分群ではない．　(c) 部分群でない．

のいずれであるかを判定し，その理由を説明せよ．

(4) $\phi\colon G \to H$ を群準同型とする．このとき，写像
$$\psi\colon G \times H \to H,\ (g,h) \mapsto \phi(g)h$$
が H 上の G の作用を定めることを証明せよ．また，任意の $h \in H$ に対し，h における固定部分群 G_h は G の正規部分群となることを証明せよ．

(5) $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ と $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ が同型でないことを証明せよ．ただし，「中国式剰余定理より明らか.」に類する記述は証明とはみなさない.

(6) 加法群 $\mathbb{Q}$ と乗法群 $\mathbb{Q}_{>0}$ が同型でないことを証明せよ.

(7) G を位数 25 の群とする．このとき，G には単位元以外の元 $z \in G$ で，任意の $g \in G$ に対して $gz = zg$ を満たすものが存在することを証明せよ. (ヒント：G 上の G の作用 $G \times G \to G, (g,h) \mapsto ghg^{-1}$ を考え，この作用 (随伴作用) による G の軌道分解を考える．)

Extra 問題解答例.

(1) 任意の $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^\times$ に対し，

$$\phi(z_1 z_2) = (z_1 z_2)^4 = z_1^4 z_2^4 = \phi(z_1)\phi(z_2)$$

となるので，ϕ は乗法群 $\mathbb{C}^\times$ から乗法群 $\mathbb{C}^\times$ への群準同型である．また，

$$\operatorname{Ker}\phi = \{z \in \mathbb{C}^\times \mid \phi(z) = 1\} = \{z \in \mathbb{C}^\times \mid z^4 = 1\} = \{1, i, -1, -i\}$$

である． $\square$

(2) $\{e\}, \{e, \tau\}, \{e, \sigma\tau\}, \{e, \sigma^2\tau\}, \{e, \sigma^3\tau\}, \{e, \sigma^4\tau\}, \{e, \sigma, \sigma^2, \sigma^3, \sigma^4\}, D_5$. $\square$

(3) (b) 部分群であるが正規部分群ではない．

<u>理由：</u>$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in H$ より，H は空ではない．

任意の $g, h \in H$ に対し，$g = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}, h = \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & d' \end{pmatrix}$ と書くと，

$$gh = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' & ab' + bd' \\ 0 & dd' \end{pmatrix} \in H.$$

さらに，

$$g^{-1} = \frac{1}{ad}\begin{pmatrix} d & -b \\ 0 & a \end{pmatrix} \in H.$$

以上より，H は $GL_2(\mathbb{R})$ の部分群である．

一方，例えば $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R}), \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in H$ に対し，

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \notin H$$

となる．よって，H は $GL_2(\mathbb{R})$ の正規部分群とはならない． $\square$

(4) e を G の単位元，e' を H の単位元とすると，群準同型 ϕ は $\phi(e) = e'$ を満たすので，任意の $h \in H$ に対し，

$$\psi(e, h) = \phi(e)h = e'h = h.$$

さらに，任意の $g_1, g_2 \in G, h \in H$ に対し，

$$\psi(g_1 g_2, h) = \phi(g_1 g_2)h = \phi(g_1)\phi(g_2)h = \psi(g_1, \phi(g_2)h) = \psi(g_1, \psi(g_2, h)).$$

よって，ψ は H 上の G の作用を定める．また，各 $h \in H$ に対し，

$$G_h = \{g \in G \mid \psi(g, h) = h\} = \{g \in G \mid \phi(g)h = h\} = \{g \in G \mid \phi(g) = e'\} = \operatorname{Ker}\phi.$$

よって，G_h は群準同型 ϕ の核に一致するので正規部分群である． $\square$

(5) $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ は $[1]_{12}$ によって生成される巡回群なので，$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ が巡回群でないことを示せば十分である．いま，任意の $a, b, c \in \mathbb{Z}$ に対し，

$$\underbrace{([a]_2, [b]_6) + \cdots + ([a]_2, [b]_6)}_{6\text{ 個}} = ([6a]_2, [6b]_6) = ([0]_2, [0]_6)$$

となるので，$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ の各元の位数は全て 6 以下である．特に，位数 12 の元は存在しないので，$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ は巡回群ではなく，$\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ と同型ではない． $\square$

(6) 全単射群準同型 $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}_{>0}$ が存在したと仮定する．このとき，$f(a) = 2$ となる $a \in \mathbb{Q}$ が必ず存在する．すると，

$$2 = f(a) = f(a/2 + a/2) = f(a/2)^2$$

となるので，$f(a/2)$ は $f(a/2)^2 = 2$ を満たす正の有理数となるが，そのような有理数は存在しないので矛盾する ($\sqrt{2}$ は無理数である)．よって，全単射群準同型 $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}_{>0}$ は存在せず，$\mathbb{Q}$ と $\mathbb{Q}_{>0}$ は同型ではない． $\square$

(7) G 上の G の随伴作用 $G \times G \to G, (g,h) \mapsto g \cdot h \coloneqq ghg^{-1}$ を考える．このとき，$z \in G$ の G-軌道は

$$G \cdot z = \{g \cdot z \mid g \in G\} = \{gzg^{-1} \mid g \in G\}$$

なので，z が

$$\text{任意の } g \in G \text{ に対して } gz = zg (\Leftrightarrow gzg^{-1} = z) \text{ を満たす}$$

ことと，

$$G \cdot z = \{z\}$$

となることは同値である．後者の条件は G-軌道 $G \cdot z$ の元の個数が 1 つであるということと同値なので，結局 G を随伴作用に関して軌道分解したときに，元の個数が 1 つであるような G-軌道が $G \cdot e = \{e\}$ 以外に現れるということを示せば良い．G の随伴作用による軌道分解を

$$G = G \cdot e \cup G \cdot z_1 \cup \cdots \cup G \cdot z_k$$

と書く．各 $i = 1, \ldots, k$ について，軌道・固定群定理より，$G \cdot z_i$ の元の個数は G/G_{z_i} の元の個数，すなわちラグランジュの定理と合わせて，

$$|G/G_{z_i}| = \frac{|G|}{|G_{z_i}|} = \frac{25}{|G_{z_i}|}$$

に等しいから，25 の約数となる．よって，$1, 5, 25$ のいずれかである．今，

$$25 = |G| = |G \cdot e| + |G \cdot z_1| + \cdots + |G \cdot z_k| = 1 + |G \cdot z_1| + \cdots + |G \cdot z_k|$$

であるから，

$$|G \cdot z_1| + \cdots + |G \cdot z_k| = 24.$$

もし左辺の項の中に 1 が現れなければ，各項のその他の候補は 5 しかないので (25 は 24 より大きいのであり得ない)，左辺は 5 の倍数となって矛盾する．よって，左辺の中には必ず

$$|G \cdot z_i| = 1$$

となる項が存在する．このとき，z_i が任意の $g \in G$ に対して $gz_i = z_i g$ を満たす元となる． $\square$

Extra 問題補足解説.

(2) ラグランジュの定理より，D_5 の部分群の位数は $|D_5| = 10$ の約数となるので (第 9 回講義資料系 7.3 (1) 参照)，$1, 2, 5, 10$ のいずれかである．位数 1 の部分群は $\{e\}$，位数 10 の部分群は D_5 という自明なものに限られるので，非自明な部分群の位数は 2 か 5 である．ここで，2 と 5 は素数なので，これらは巡回群である (第 9 回講義資料系 7.5 参照)．よって，非自明な部分群は D_5 の (単位元でない)1 元で生成される部分群に限られる．これらを具体的に計算してみると，

$$\begin{aligned}
&\langle \sigma \rangle = \langle \sigma^2 \rangle = \langle \sigma^3 \rangle = \langle \sigma^4 \rangle = \{e, \sigma, \sigma^2, \sigma^3, \sigma^4\}, \\
&\langle \tau \rangle = \{e, \tau\}, \quad \langle \sigma\tau \rangle = \{e, \sigma\tau\}, \quad \langle \sigma^2\tau \rangle = \{e, \sigma^2\tau\}, \quad \langle \sigma^3\tau \rangle = \{e, \sigma^3\tau\}, \quad \langle \sigma^4\tau \rangle = \{e, \sigma^4\tau\}.
\end{aligned}$$

以上より，D_5 の部分群は，

$$\{e\}, \{e, \tau\}, \{e, \sigma\tau\}, \{e, \sigma^2\tau\}, \{e, \sigma^3\tau\}, \{e, \sigma^4\tau\}, \{e, \sigma, \sigma^2, \sigma^3, \sigma^4\}, D_5$$

で全てである．

(7) 一般に群 G に対し，

$$Z(G) \coloneqq \{z \in G \mid gz = zg, \ \forall g \in G\}$$

とし，$Z(G)$ を G の**中心 (center)** と呼ぶのであった (代数学 I 中間試験解答例問題 6 補足解説参照)．この $Z(G)$ は G の正規部分群であったことも合わせて思い出そう[*1]．

[*1] 代数学 I 中間試験解答例問題 6 補足解説では $Z(G)$ が G の部分群であることのみ証明している．正規性については，各自考えよ (証明を見たい方は 2021 年度第 10 回講義資料 p.5 例 7 参照)．

この言葉を使えば，本問は「G が位数 25 のとき，$Z(G) \neq \{e\}$ であることを証明せよ」という問題であると言える．この事実は (7) の解答と全く同様の証明で次の定理に一般化される (補足資料「代数学 I Extra 講義資料」定理 12.4 も参照).

定理

p を素数とし，G を位数 p^ℓ の群とする (ℓ は 1 以上の整数)．このとき，

$$Z(G) \neq \{e\}$$

となる．つまり，このような群においては必ず単位元以外に全ての元と可換性を持つ元が存在する．

注意．位数が素数 p の自然数べきであるような群を **p-群 (p-group)** という．例えば，位数 25 の群 G は $25 = 5^2$ なので，5-群である．

定理の証明. G 上の G の随伴作用 $G \times G \to G, (g, h) \mapsto g \cdot h := ghg^{-1}$ を考える．このとき，$z \in G$ の G-軌道は

$$G \cdot z = \{g \cdot z \mid g \in G\} = \{gzg^{-1} \mid g \in G\}$$

なので，z が $Z(G)$ の元であること，すなわち

$$\text{任意の } g \in G \text{ に対して } gz = zg (\Leftrightarrow gzg^{-1} = z) \text{ を満たす}$$

ことと，

$$G \cdot z = \{z\}$$

となることは同値である．後者の条件は G-軌道 $G \cdot z$ の元の個数が 1 つであるということと同値なので，結局 G を随伴作用に関して軌道分解したときに，元の個数が 1 つであるような G-軌道が $G \cdot e = \{e\}$ 以外に現れるということを示せば良い．G の随伴作用による軌道分解を

$$G = G \cdot e \cup G \cdot z_1 \cup \cdots \cup G \cdot z_k$$

と書く．各 $i = 1, \ldots, k$ について，軌道・固定群定理より，$G \cdot z_i$ の元の個数は G/G_{z_i} の元の個数，すなわちラグランジュの定理と合わせて，

$$|G/G_{z_i}| = \frac{|G|}{|G_{z_i}|} = \frac{p^\ell}{|G_{z_i}|}$$

に等しいから，p^ℓ の約数となる．よって，

$$1, p, p^2, \ldots, p^\ell$$

のいずれかである．今，

$$p^\ell = |G| = |G \cdot e| + |G \cdot z_1| + \cdots + |G \cdot z_k| = 1 + |G \cdot z_1| + \cdots + |G \cdot z_k|$$

であるから，

$$|G \cdot z_1| + \cdots + |G \cdot z_k| = p^\ell - 1 \equiv -1 \mod p.$$

もし左辺の項の中に 1 が現れなければ，各項のその他の候補は全て p の倍数なので，左辺は p の倍数となって矛盾する．よって，左辺の中には必ず

$$|G \cdot z_i| = 1$$

となる項が存在する．このとき，$z_i \in Z(G)$ となる． □