代数学 I 中間試験

(試験時間：60 分)

担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)

- 問題は $\boxed{1}$ から $\boxed{6}$ までの 6 問で 100 点満点である．これに加えて $\boxed{\text{Extra}}$ が 20 点分あるので，計 120 点となるが，100 点を超えた場合には切り捨てて 100 点を中間試験の点数とする.
- 答えのみで良い問題であっても，解答の手順が書いてあった場合，部分点を与える**可能性**がある．ただし，解答の過程を書く場合，最終的な答えがどれなのかを明確に記すようにすること.
- 解答は日本語または英語で行うこと．また，どの問の解答であるかを明確に記したうえで解答すること.
- 名前，学籍番号の書き忘れには十分注意すること．特に解答用紙を 2 枚用いた場合にはその両方に名前，学籍番号が記載されていることを確認すること．記載されていない場合，採点は行わない.

記号. 以下では n 次対称群を $\mathfrak{S}_n$，n 次二面体群を D_n と書く．また，D_n の元を

$$D_n = \{e, \sigma, \sigma^2, \dots, \sigma^{n-1}, \tau, \sigma\tau, \sigma^2\tau, \dots, \sigma^{n-1}\tau\}$$

と書く．ただし $\sigma^n = e, \tau^2 = e, \tau\sigma = \sigma^{-1}\tau$ とする.

$\boxed{1}$ (5 点) 空でない集合 G に二項演算

$$\cdot \colon G \times G \to G, \quad (g_1, g_2) \mapsto g_1 \cdot g_2$$

が与えられているとする．G がこの二項演算に関して群をなすための必要最低限の条件を述べよ.

$\boxed{2}$ (20 点)

(1) 加法群 $\mathbb{Z}/175\mathbb{Z}$ における部分群

$$H = \{[70m]_{175} \mid m \in \mathbb{Z}\}$$

の位数を求めよ．解答は答えのみで良い.

(2)

$$f \colon \mathbb{Z}/\boxed{ア}\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/\boxed{イ}\mathbb{Z},\ [a]_{\boxed{ア}} \mapsto [a^2]_{\boxed{イ}}$$

が well-defined な写像を与えるような$\boxed{ア}$, $\boxed{イ}$の組み合わせとして正しいものを以下から全て選択せよ.

(1) $\boxed{ア} = 2, \boxed{イ} = 6$
(2) $\boxed{ア} = 4, \boxed{イ} = 8$
(3) $\boxed{ア} = 3, \boxed{イ} = 9$
(4) $\boxed{ア} = 5, \boxed{イ} = 5$
(5) $\boxed{ア} = 6, \boxed{イ} = 3$

(3) 乗法群 $(\mathbb{Z}/77\mathbb{Z})^{\times}$ における $[50]_{77}$ の逆元を求めよ．解答は答えのみで良い．

(4) 乗法群 $(\mathbb{Z}/15\mathbb{Z})^{\times}$ の位数を求めよ．解答は答えのみで良い．

$\boxed{3}$ (20 点)

(1) $\mathfrak{S}_5$ の位数を答えよ．解答は答えのみで良い．

(2) $\mathfrak{S}_4$ において，

$$\sigma \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

を満たす $\sigma \in \mathfrak{S}_4$ は

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \boxed{ア} & \boxed{イ} & \boxed{ウ} & \boxed{エ} \end{pmatrix}$$

である．$\boxed{ア}$～$\boxed{エ}$に入る値を求めよ．解答は答えのみで良い．

(3) $\mathfrak{S}_4$ において，

$$s_1 = (1\ 2),\ s_2 = (2\ 3),\ s_3 = (3\ 4)$$

とする．このとき，

$$s_3 s_2 s_2 s_1 s_2 s_1 s_3 s_2 s_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \boxed{ア} & \boxed{イ} & \boxed{ウ} & \boxed{エ} \end{pmatrix}$$

である．$\boxed{ア}$～$\boxed{エ}$に入る値を求めよ．解答は答えのみで良い．

(4) $\mathfrak{S}_{10}$ において，

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 10 & 5 & 7 & 1 & 6 & 2 & 3 & 4 & 9 & 8 \end{pmatrix}$$

を互いに素な巡回置換の合成で表せ．解答は答えのみで良い．

$\boxed{4}$ (15 点)

(1) D_7 において，

$$\sigma^{-100} = \sigma^{\boxed{ア}}$$

である．$\boxed{ア}$に入る 0 以上 6 以下の整数を求めよ．解答は答えのみで良い．

(2) D_6 において，

$$\sigma^5(\sigma\tau)^{-1}\tau^3\sigma^{-3}\tau\sigma^4 = \sigma^{\boxed{ア}}\tau^{\boxed{イ}}$$

である．$\boxed{ア}$, $\boxed{イ}$に入る整数を求めよ． ただし，$\boxed{ア}$は 0 以上 5 以下，$\boxed{イ}$は 0 または 1の値で解答せよ．
解答は答えのみで良い．

(3) D_8 の位数 2 の部分群の個数を求めよ．解答は答えのみで良い．

$\boxed{5}$ (20 点) 以下の問いに答えよ．ただし，解答は「部分群となる」，「部分群とならない」のいずれかを答えるだけで良い．

(1) 乗法群 $\mathbb{C}^\times$ の以下の部分集合 H が $\mathbb{C}^\times$ の部分群となるかどうかを判定せよ ($i = \sqrt{-1}$).

$$H = \{1, i, -i\}.$$

(2) 乗法群 $(\mathbb{Z}/18\mathbb{Z})^\times$ の以下の部分集合 H が $(\mathbb{Z}/18\mathbb{Z})^\times$ の部分群となるかどうかを判定せよ．

$$H = \{[1]_{18}, [7]_{18}, [13]_{18}\}.$$

(3) $\mathfrak{S}_3$ の以下の部分集合 H が $\mathfrak{S}_3$ の部分群となるかどうかを判定せよ．

$$H = \{e, (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}.$$

(4) D_6 の以下の部分集合 H が D_6 の部分群となるかどうかを判定せよ．

$$H = \{e, \sigma^2, \sigma^4, \sigma^2\tau, \sigma^4\tau\}.$$

$\boxed{6}$ (20 点)　一般線型群

$$GL_2(\mathbb{C}) \coloneqq \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a, b, c, d \in \mathbb{C}, \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc \neq 0 \right\}$$

を考える ($\det A$ は A の行列式を表す)．次の $GL_2(\mathbb{C})$ の部分集合 G_1, G_2, G_3 が，それぞれ $GL_2(\mathbb{C})$ の

(a) 部分群となる　　　　(b) 部分群とならない

のどちらになるかを選び，その理由を説明せよ．

(1) $G_1 = \{A \in GL_2(\mathbb{C}) \mid \det A \in \mathbb{Z}\}$.

(2) $G_2 = \left\{ A \in GL_2(\mathbb{C}) \;\middle|\; A \text{ は } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ を固有ベクトルに持つ} \right\}$.

(3) $G_3 = \{A \in GL_2(\mathbb{C}) \mid A$ は任意の $B \in GL_2(\mathbb{C})$ に対して，$AB = BA$ を満たす $\}$.

$\boxed{\text{Extra}}$ (20 点)

(1) 集合 $\mathbb{R}^\times \coloneqq \mathbb{R} \setminus \{0\}$ に以下の二項演算を考えたものが群となるかどうかを判定し，その理由を説明せよ．

$$\circ \colon \mathbb{R}^\times \times \mathbb{R}^\times \to \mathbb{R}^\times,\ (r_1, r_2) \mapsto r_1 \circ r_2 \coloneqq 2r_1r_2.$$

(2) D_3 の部分群を全て求めよ．解答は答えのみで良い．

(3) $\mathfrak{S}_4$ において，

$$\sigma \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \circ \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

を満たす $\sigma \in \mathfrak{S}_4$ は存在しないことを証明せよ．

(4) 7 以上の任意の素数 p に対し，$3^{p-2} + 5^{p-2} + 7 \times 15^{p-2}$ を p で割った余りは 1 であることを証明せよ．(Hint: フェルマーの小定理を使える形を目指す．)

問題は以上である．