部分分数分解可能性について

講義担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)*

本講義資料では，有理式の部分分数分解可能性を証明する．定理の正確な主張は以下である．

定理

$$g(x) = \prod_{i=1}^{k}(x+a_i)^{m_i}\prod_{j=1}^{\ell}(x^2+b_jx+c_j)^{n_j} \neq 0$$

ただし，$k, \ell \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $m_i, n_j \in \mathbb{Z}_{>0}, a_i, b_j, c_j \in \mathbb{R}, b_j^2 - 4c_j < 0$ $(i = 1, \ldots, k, j = 1, \ldots, \ell)$ とする．$(i_1 \neq i_2 \Rightarrow a_{i_1} \neq a_{i_2}$, $j_1 \neq j_2 \Rightarrow (b_{j_1}, c_{j_1}) \neq (b_{j_2}, c_{j_2})$ とする．) このとき，任意の 1 変数実係数多項式 $h(x)$ に対し，有理式 $f(x) = h(x)/g(x)$ は以下の形の式の有限和として書ける．

(I) 実係数多項式 $q(x)$

(II) $\dfrac{r}{(x+a_i)^s}$ $(r \in \mathbb{R}, s \in \mathbb{Z}, 0 < s \leq m_i, i = 1, \ldots, k)$

(III) $\dfrac{px+q}{(x^2+b_jx+c_j)^t}$ $(p, q \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{Z}, 0 < t \leq n_j, j = 1, \ldots, \ell)$

さらにこのとき，$q(x)$ は $h(x)$ を $g(x)$ で (多項式の範囲で) 割った商である．

注意 1. $f(x)$ を (I), (II), (III) の形の式の有限和で書く方法は実は 1 通りに定まる (部分分数分解の一意性)．一意性の証明はここでは与えないが，特別な知識や定理を要するわけでは無いので，是非各自考えてもらいたい．

注意 2. この定理では $g(x)$ の形を特別なものに限定しているように見えるが，実は任意の (0 でない) 実係数多項式 $g(x)$ は定理に書いた形 (の定数倍) に書けることが知られている．

一般に任意の 0 でない複素数係数 1 変数 n 次多項式 $g(x)$ は，ある $a, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ を用いて，

$$g(x) = a(x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_n) \tag{$*$}$$

という形に因数分解できることが知られている ($\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ には重複があってもよい)．この定理は**代数学の基本定理**と呼ばれる．$\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ は $g(x)$ の**根 (こん)** と呼ばれる．さらに，$g(x)$ の係数が全て実数であるとすると，α が $g(x)$ の根となるとき，その共役複素数 $\overline{\alpha}$ も $g(x)$ の根となり，しかも α の重複度 ($\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ の中の α の個数) は $\overline{\alpha}$ の重複度に等しい (理由を考えよ)．よって，$g(x)$ の実数でない根 α に対しては $(x-\alpha)$ と $(x-\overline{\alpha})$ をペアにして，$(x-\alpha)(x-\overline{\alpha}) = x^2+bx+c$ とすると，$b, c \in \mathbb{R}$ であり，$b^2-4c < 0$ である．よって，$g(x)$ が実数係数多項式の場合，(最高次の係数 a を 1 とすると)($*$) から定理の形の $g(x)$ の分解が得られることがわかる．なお，最高次の係数 a については，定理においては分子の $h(x)$ に押しつけて考えれば，1 としても一般性を失わないことがわかる．

この注意より，ここで解説する部分分数分解可能性の定理は，**任意の実数係数有理式に適用可能な定理**であることがわかる．

定理の証明. まず $h(x)$ を $g(x)$ で多項式の範囲で割った商を $q(x)$, 余りを $r(x)$ とすると，

$$f(x) = q(x) + \frac{r(x)}{g(x)}$$

* *e-mail*：hoya@math.titech.ac.jp

であり，多項式として $r(x)$ の次数 ($\deg r(x)$ と書く) は $g(x)$ の次数 $\deg g(x)$ 未満である．よって，$r(x)/g(x)$ が (II)，(III) の形の式の有限和で書けることを示せば良い．すなわち，$\deg h(x) < \deg g(x)$ が成立すると仮定した上で，$f(x) = h(x)/g(x)$ が (II)，(III) の形の式の有限和で書けることを示せばよい．以下この事実を $N = \deg g(x) = \sum_{i=1}^{k} m_i + 2\sum_{j}^{\ell} n_j$ に関する帰納法で示す．

$N = 1$ のとき，$g(x)$ は $x + a$ の形であり，$\deg h(x) < 1$ なので，$h(x)$ は実数の定数だから，$f(x)$ は既に (II) の形である．

次に $N > 1$ とし，$\deg A(x) < \deg B(x) < N$ なる任意の有理式 $C(x) = A(x)/B(x)$ に対しては既に主張が示されていると仮定する．

<u>$k > 0$ のとき：</u>$g_0(x) \coloneqq \prod_{i=2}^{k}(x + a_i)^{m_i} \prod_{j=1}^{\ell}(x^2 + b_j x + c_j)^{n_j}$ とすると，$g(x) = (x + a_1)^{m_1} g_0(x)$ である．このとき，$g_0(-a_1) \neq 0$ に注意して，

$$r \coloneqq \frac{h(-a_1)}{g_0(-a_1)}$$

とする．すると，$h(-a_1) - r g_0(-a_1) = 0$ なので，因数定理より，$h(x) - r g_0(x) = (x + a_1)k(x)$ (ただし，$k(x)$ は実係数多項式) と書ける．よって，

$$f_0(x) \coloneqq f(x) - \frac{r}{(x + a_1)^{m_1}} = \frac{h(x) - r g_0(x)}{g(x)} = \frac{k(x)}{(x + a_1)^{m_1 - 1} g_0(x)}$$

を考えると，$(x + a_1)^{m_1 - 1} g_0(x)$ の次数は $N - 1$ であり，さらに $\deg h(x) < N, \deg g_0(x) < N$ より，

$$\deg k(x) = \deg(h(x) - r g_0(x)) - 1 < N - 1.$$

よって，帰納法の仮定より，$f_0(x)$ は (II)，(III) の形の式の有限和で書けることがわかる[*1]．いま，

$$f(x) = \frac{r}{(x + a_1)^{m_1}} + f_0(x)$$

なので示すべきことは示された．

<u>$k = 0$ のとき：</u>$g_0(x) \coloneqq \prod_{j=2}^{\ell}(x^2 + b_j x + c_j)^{n_j}$ とすると，$g(x) = (x^2 + b_1 x + c_1)^{n_1} g_0(x)$ である．ここで，$x^2 + b_1 x + c_1 = 0$ の複素数解の一つを α とすると，もう一つの解はその共役複素数 $\overline{\alpha}$ である ($b_1^2 - 4c_1 < 0$ より α は実数ではないことに注意)．これらを用いて，以下 $k > 0$ のときと同様の議論を行う．

$g_0(\alpha) \neq 0$ に注意して，

$$e \coloneqq \frac{h(\alpha)}{g_0(\alpha)}$$

とおく (e は一般には複素数であることに注意)．このとき，$h(\alpha) - e g_0(\alpha) = 0$ であり，さらに $g(x), h(x)$ が実係数多項式であることに注意すると，$h(\overline{\alpha}) - \overline{e} g_0(\overline{\alpha}) = \overline{h(\alpha) - e g_0(\alpha)} = 0$ となる．よって，

$$h_0(x) \coloneqq h(x) - \frac{e}{\alpha - \overline{\alpha}}(x - \overline{\alpha}) g_0(x) - \frac{\overline{e}}{\overline{\alpha} - \alpha}(x - \alpha) g_0(x)$$

とすると，$h_0(\alpha) = h_0(\overline{\alpha}) = 0$ である．さらに，

$$p \coloneqq \frac{e - \overline{e}}{\alpha - \overline{\alpha}}, \qquad q \coloneqq \frac{-e\overline{\alpha} + \overline{e}\alpha}{\alpha - \overline{\alpha}}$$

とすると，これらは複素共役を考えても値が不変であることからいずれも実数である．これらを用いると，

$$h_0(x) = h(x) - (px + q) g_0(x)$$

となるので，$h_0(x)$ は実係数多項式である．因数定理より，$h_0(x)$ は $(x - \alpha)(x - \overline{\alpha}) = x^2 + b_1 x + c_1$ で割り切れて，$h_0(x) = (x^2 + b_1 x + c_1) k(x)$ ($k(x)$ は実係数多項式) と書ける．よって，

$$f_0(x) \coloneqq f(x) - \frac{px + q}{(x^2 + b_1 x + c_1)^{n_1}} = \frac{h(x) - (px + q) g_0(x)}{g(x)} = \frac{k(x)}{(x^2 + b_1 x + c_1)^{n_1 - 1} g_0(x)}$$

[*1] より正確には，(II) の形の式のうち分母が $(x + a_1)^{m_1}$ のものは用いずに書ける．

を考えると，$(x^2+b_1x+c_1)^{n_1-1}g_0(x)$ の次数は $N-2$ であり，さらに $\deg h(x) < N, \deg g_0(x) \leq N-2$ より，

$$\deg k(x) = \deg(h_0(x)) - 2 = \deg(h(x) - (px+q)g_0(x)) - 2 < N-2.$$

よって，帰納法の仮定より，$f_0(x)$ は (II)，(III) の形の式の有限和で書けることがわかる[*2]．いま，

$$f(x) = \frac{px+q}{(x^2+b_1x+c_1)^{n_1}} + f_0(x)$$

なので示すべきことは示された． □

[*2] より正確には，(III) の形の式のうち分母が $(x^2+b_1x+c_1)^{n_1}$ のものは用いずに書ける．