線形代数 II 第 0 回レポート課題解答例

担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)*

問題 1

次の行列の積のうち定義されるものを全て選び，計算をせよ．

(1) $\begin{pmatrix} -9 & 1 & 8 \\ -7 & -6 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & -5 & 0 \\ 2 & 7 & -1 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} -9 & -6 & -7 \\ 5 & -1 & 0 \\ -5 & -8 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -3 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$ (5) $\begin{pmatrix} -8 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & -1 & -6 \end{pmatrix}$

問題 1 解答例． 定義されるもの：(2), (3), (5).

$$(2)\ \begin{pmatrix} -54 & -2 \\ 14 & 5 \\ -2 & -12 \end{pmatrix} \qquad (3)\ \begin{pmatrix} 8 & -12 \\ -10 & 15 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \qquad (5)\ \begin{pmatrix} -222 & 37 & 222 \end{pmatrix}.$$

□

注意 1. 行列の積が定義されるのは

$$(\ell \times m \text{ 行列}) \cdot (m \times n \text{ 行列})$$

の形のみである．このとき答えは，$\ell \times n$ 行列となる．なお，1×1 行列と単なる数は異なるものなので，(4) は “定義できない” が正解である (前半の積を先に計算すると 1×1 行列が出る.) ただし，これらを暗に同一視することも文脈によってはあり得るので一応注意の必要がある (誤解のないように問題文に書くべきであった).

問題 2

次の x, y, z に関する連立 1 次方程式が解を持つための定数 a の条件を求め，そのときの連立 1 次方程式の解を求めよ．

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 3x + 2y - 2z = 2 \\ -4x - 3y + z = a \end{cases}$$

問題 2 解答例． 問題の連立 1 次方程式に対応する拡大係数行列を行基本変形を用いて簡約化すると，

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 & 2 \\ -4 & -3 & 1 & a \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 2 行，第 3 行に加える}]{\text{第 1 行の}-3\text{ 倍，}4\text{ 倍をそれぞれ}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & -1 \\ 0 & 1 & 5 & a+4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{第 2 行を}-1\text{ 倍する}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & a+4 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 1 行と第 3 行に加える}]{\text{第 2 行の}-1\text{ 倍を}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a+3 \end{array}\right)$$

* *e-mail*：hoya@shibaura-it.ac.jp

ここで，拡大係数行列の階数が係数行列の階数と等しいことが連立１次方程式が解を持つための必要十分条件なので，求める a の条件は $a=-3$. また，このとき上の計算より，問題の連立１次方程式は

$$\begin{cases} x-4z=0 \\ y+5z=1 \end{cases}$$

と同値なので，求める解は $(x,y,z)=(4c,-5c+1,c)$. ただし，c は任意の値. □

問題 3

次の行列の逆行列を求めよ.

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -3 \\ -2 & 4 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

問題 3 解答例.

$$\tilde{A}=\left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 5 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 3 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

を行基本変形により簡約化する.

$$\tilde{A}\xrightarrow{\text{第 1 行を}-1\text{ 倍する}}\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 5 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 3 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\xrightarrow[\text{第 2 行，第 4 行に加える}]{\text{第 1 行の 4 倍，2 倍をそれぞれ}}\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & -4 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{第 3 行，第 4 行に加える}]{\text{第 2 行の}-2\text{ 倍,}-4\text{ 倍をそれぞれ}}\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -5 & 8 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -8 & 14 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{第 3 行を}-1/2\text{ 倍する}}\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5/2 & -4 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -8 & 14 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{第 1 行，第 3 行，第 4 行に加える}]{\text{第 3 行の 1 倍,}-1\text{ 倍，3 倍をそれぞれ}}\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 5/2 & -5 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5/2 & -4 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/2 & 2 & -1 & -3/2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{第 4 行を}-2\text{ 倍する}}\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 5/2 & -5 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5/2 & -4 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 2 & 3 & -2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{第 1 行，第 2 行，第 3 行に加える}]{\text{第 4 行の}-5/2\text{ 倍，}3/2\text{ 倍,}-5/2\text{ 倍をそれぞれ}}\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 & -4 & -8 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -6 & 3 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 & -4 & -8 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 2 & 3 & -2 \end{array}\right)$$

これより, 求める逆行列は $\begin{pmatrix} 5 & -4 & -8 & 5 \\ -6 & 3 & 5 & -3 \\ 6 & -4 & -8 & 5 \\ -4 & 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$. □

注意 2. 問題 2 や問題 3 のような問は**検算が可能である**. (実際に求めたものが連立１次方程式を満たしているか，ちゃんと正しく逆行列になっているか.) よって時間に余裕がある場合，検算をすること.