線形代数 II 第 1 回レポート課題解答例

担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)*

問題 1

次の行列式の値を求めよ．

(1) $\left|\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\right|$ (2) $\left|\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & -1 \\ -1 & 6 & -4 \end{pmatrix}\right|$ (3) $\left|\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & 5 \\ 1 & -4 & 1 \end{pmatrix}\right|$

(4) $\left|\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & 2 & -4 \\ -2 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}\right|$ (5) $\left|\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right|$

問題 1 解答例.

(1) -2 (2) 34 (3) 63 (4) -36 (5) -360

□

問題 1 補足解説. 定義に従って計算を進めればよい：

定義. $n \times n$ 行列 A の行列式 $|A|$ を n に関して帰納的に以下で定義する：

- $n = 1$ のとき，1×1 行列 (a) に対して，$|(a)| := a$.
- $(n-1) \times (n-1)$ 行列の行列式が定義されているとき，$n \times n$ 行列

$$A = (a_{i,j})_{i,j=1,\dots,n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

に対して，

$$\begin{aligned} |A| &:= a_{11}|\check{A}_{11}| - a_{12}|\check{A}_{12}| + a_{13}|\check{A}_{13}| - \cdots + (-1)^{1+j} a_{1j}|\check{A}_{1j}| + \cdots + (-1)^{1+n} a_{1n}|\check{A}_{1n}| \\ &= a_{11}\widetilde{a_{11}} + a_{12}\widetilde{a_{12}} + \cdots + a_{1n}\widetilde{a_{1n}}. \end{aligned}$$

ここで，$\check{A}_{ij}$ は A から i 行，j 列を取り除いて得られる $(n-1)\times(n-1)$ 行列，$\widetilde{a_{ij}} := (-1)^{i+j}|\check{A}_{ij}|$ である．(この定義に現れるものは $i = 1$ のものだけである.)
この $\widetilde{a_{ij}}$ は A の (i,j)-**余因子**と呼ばれ，上の $|A|$ の公式は $|A|$ の (第 1 行に関する) **余因子展開**と呼ばれる．

また，2×2 行列，3×3 行列の行列式は公式として覚えておくと良いだろう．**ただし，これ以上のサイズの行列の行列式の公式は "同様" ではない!!**

* *e-mail*：hoya@shibaura-it.ac.jp

2×2 行列，3×3 行列の行列式の公式：

- $\left|\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right| = ad - bc.$
- $\left|\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\right| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$

(サラスの方法)

例えば問題 1 (5) の計算は以下のように進む.

$$
\begin{aligned}
&\left|\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right| \\
&= 0 - 3\left|\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 3 \\ 5 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right| + 0 - 0 + \left|\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & -1 \\ -3 & 2 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}\right| \\
&= -3\left(0 - 0 + 2\left|\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix}\right| - 0\right) \\
&\qquad + \left(0 - (-2)\left|\begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ -3 & 0 & 1 \\ 5 & -3 & 0 \end{pmatrix}\right| + 0 - 2\left|\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -3 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & -3 \end{pmatrix}\right|\right) \\
&= -6(0 + 60 + 0 - (-18) - (-12) - 0) \\
&\qquad + 2(0 + 20 - 9 - (-6) - 0 - 0) - 2(-12 + 0 - 12 - 0 - 9 - 40) \quad \text{(サラスの方法を用いた)} \\
&= -360.
\end{aligned}
$$

□