線形代数 II 第 2 回レポート課題解答例

担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)*

問題 1

次の行列式の値を求めよ．

(1) $\left|\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 6 & 6 \\ 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 7 \end{pmatrix}\right|$ (2) $\left|\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}\right|$

問題 1 解答例.

(1)

$$\left|\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 6 & 6 \\ 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 7 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 5 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 6 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 7 \end{pmatrix}\right| \quad \left(\begin{array}{l} \text{第 6 列の } -1 \text{ 倍を} \\ \text{第 1，2，3，4，5 列に加えた．} \end{array}\right)$$

$$= -\left|\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\right| = -(-1)^5 = 1$$

□

(2)

$$\left|\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\right| \quad (\text{第 1，2，3，4 列を第 5 列に加えた．})$$

$$= 0. \quad (\text{第 5 列が全て 0 となったため．})$$

□

問題 1 補足解説. 本問は定義通り計算しようとすると計算量が非常に多くなるので，行列式の性質を上手く用いて計算するのが良い．以下は，計算において非常に便利な性質だったので思い出しておくこと (なお，これらは**多重線形性**，**交代性**のみから導かれたことも合わせて頭に入れておいてほしい)：

* *e-mail*：hoya@shibaura-it.ac.jp

$\mathbb{K}$ を $\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ または { 文字式 } とする．$\mathbb{K}$ の元を成分とする $n\times n$ 行列に対して以下が成立する：

(i) $|(\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{0},\dots,\boldsymbol{a}_n)|=0$. ただし，$\boldsymbol{0}$ は n 次 0 縦ベクトル．[0 のみの列があれば行列式は 0]

(ii) $|(\boldsymbol{a}_1,\dots,\overset{\substack{j\\ \vee}}{\boldsymbol{b}},\dots,\overset{\substack{j'\\ \vee}}{\boldsymbol{b}},\dots,\boldsymbol{a}_n)|=0$. ただし，$j\neq j'$. [同じ列があれば行列式は 0]

(iii) $|(\boldsymbol{a}_1,\dots,\overset{\substack{j\\ \vee}}{\boldsymbol{a}_j},\dots,\boldsymbol{a}_{j'}\overset{\substack{j'\\ \vee}}{+}c\boldsymbol{a}_j,\dots,\boldsymbol{a}_n)|=|(\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_j,\dots,\boldsymbol{a}_{j'},\dots,\boldsymbol{a}_n)|$. ただし，$c\in\mathbb{K}$ であり，$j\neq j'$ ($j<j'$ である必要は無い)．[ある列に他の列の定数倍を加えても行列式の値は変わらない]

また，次回の講義で取り扱うが，行列式の転置不変性から，行列式は行に関しても多重線形性，交代性をもち，同じ証明で上の性質を行に置き換えたバージョンも成立する：

- (多重線形性：行に関して) 任意の $c,c'\in\mathbb{K}$，$j=1,\dots,n$ に対し，

$$\left|\begin{array}{c}\\ \\ j\triangleright\\ \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix}\boldsymbol{b}_1\\ \vdots\\ c\boldsymbol{b}_j+c'\boldsymbol{b}'_j\\ \vdots\\ \boldsymbol{b}_n\end{pmatrix}\right| = c\left|\begin{pmatrix}\boldsymbol{b}_1\\ \vdots\\ \boldsymbol{b}_j\\ \vdots\\ \boldsymbol{b}_n\end{pmatrix}\right| + c'\left|\begin{pmatrix}\boldsymbol{b}_1\\ \vdots\\ \boldsymbol{b}'_j\\ \vdots\\ \boldsymbol{b}_n\end{pmatrix}\right|.$$

  ただし，$\boldsymbol{b}_1,\dots,\boldsymbol{b}_n$, $\boldsymbol{b}'_j$ は任意の $1\times n$ 行列．

- (交代性：行に関して) 任意の $1\le i<j\le n$ に対し，

$$\left|\begin{array}{c}\\ \\ i\triangleright\\ \\ j\triangleright\\ \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix}\boldsymbol{b}_1\\ \vdots\\ \boldsymbol{b}_i\\ \vdots\\ \boldsymbol{b}_j\\ \vdots\\ \boldsymbol{b}_n\end{pmatrix}\right| = -\left|\begin{array}{c}\\ \\ i\triangleright\\ \\ j\triangleright\\ \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix}\boldsymbol{b}_1\\ \vdots\\ \boldsymbol{b}_j\\ \vdots\\ \boldsymbol{b}_i\\ \vdots\\ \boldsymbol{b}_n\end{pmatrix}\right|.$$

  ただし，$\boldsymbol{b}_1,\dots,\boldsymbol{b}_n$ は任意の $1\times n$ 行列．[行を入れ替えると行列式は -1 倍]

(i)–(iii) の行のバージョン：

(i)′ $\left|\begin{pmatrix}\boldsymbol{b}_1\\ \vdots\\ \boldsymbol{0}\\ \vdots\\ \boldsymbol{b}_n\end{pmatrix}\right|=0$. ただし，$\boldsymbol{0}$ は n 次 0 横ベクトル．[0 のみの行があれば行列式は 0]

(ii)′ $\left|\begin{array}{c}\\ \\ j\triangleright\\ \\ j'\triangleright\\ \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix}\boldsymbol{b}_1\\ \vdots\\ \boldsymbol{d}\\ \vdots\\ \boldsymbol{d}\\ \vdots\\ \boldsymbol{b}_n\end{pmatrix}\right|=0$. ただし，$j\neq j'$. [同じ行があれば行列式は 0]

(iii)′ $\left|\begin{array}{c}\\ \\ j\triangleright\\ \\ j'\triangleright\\ \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix}\boldsymbol{b}_1\\ \vdots\\ \boldsymbol{b}_j\\ \vdots\\ \boldsymbol{b}_{j'}+c\boldsymbol{b}_j\\ \vdots\\ \boldsymbol{b}_n\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}\boldsymbol{b}_1\\ \vdots\\ \boldsymbol{b}_j\\ \vdots\\ \boldsymbol{b}_{j'}\\ \vdots\\ \boldsymbol{b}_n\end{pmatrix}\right|$. ただし，$c\in\mathbb{K}$ であり，$j\neq j'$ ($j<j'$ である必要は無い)．

[ある行に他の行の定数倍を加えても行列式の値は変わらない]

なお，(2) については，どの行 (あるいは列) もその数を全て足すと 0 になるということに気付けば，解答例のような変形を思いつくことができる． □

問題 2

次の式を因数分解せよ．

(1) $\left|\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{pmatrix}\right|$　　(2) $\left|\begin{pmatrix} x & y & y & y \\ y & x & y & y \\ y & y & x & y \\ y & y & y & x \end{pmatrix}\right|$

問題 2 解答例.

(1)

$$\begin{aligned}
\left|\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{pmatrix}\right| &= \left|\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ x_1^2 & x_2^2 - x_1^2 & x_3^2 - x_1^2 \end{pmatrix}\right| \quad \text{(第 1 列の -1 倍を第 2, 3 列に加えた.)} \\
&= \left|\begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ x_2^2 - x_1^2 & x_3^2 - x_1^2 \end{pmatrix}\right| \\
&= \left|\begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ (x_2 - x_1)(x_2 + x_1) & (x_3 - x_1)(x_3 + x_1) \end{pmatrix}\right| \\
&= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\left|\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x_2 + x_1 & x_3 + x_1 \end{pmatrix}\right| \quad \text{(多重線型性で定数倍を外に出した.)} \\
&= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2).
\end{aligned}$$

□

(1) 別解 (以下の補足も参照のこと) 与式は x_1, x_2, x_3 についての多項式であるが，任意の i, j $(i \neq j)$ について $x_i = x_j$ とすると行列内に同じ列が 2 つ現れることになるので，このとき恒等的に 0 となる．よって因数定理より，この多項式は，任意の i, j $(i \neq j)$ について $(x_i - x_j)$ で割り切れる．よって，ある多項式 $p(x_1, x_2, x_3)$ を用いて，

$$\left|\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{pmatrix}\right| = p(x_1, x_2, x_3)(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)$$

と書ける．一方，サラスの公式で行列式を求めることを考えると，左辺からは 3 次以上の項は現れないことがわかる．よって，$p(x_1, x_2, x_3)$ は定数 c である．さらに，$x_2 x_3^2$ という項に注目すると，サラスの公式から，左辺からはこの項は係数 1 で現れ, 右辺からは係数 c で現れることがわかる．よって，$p(x_1, x_2, x_3) = c = 1$ であり，求める答えは $(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)$.

(2)

$$\begin{aligned}
\left|\begin{pmatrix} x & y & y & y \\ y & x & y & y \\ y & y & x & y \\ y & y & y & x \end{pmatrix}\right| &= \left|\begin{pmatrix} x + 3y & y & y & y \\ x + 3y & x & y & y \\ x + 3y & y & x & y \\ x + 3y & y & y & x \end{pmatrix}\right| \quad \text{(第 2, 3, 4 列を第 1 列に加えた.)} \\
&= (x + 3y)\left|\begin{pmatrix} 1 & y & y & y \\ 1 & x & y & y \\ 1 & y & x & y \\ 1 & y & y & x \end{pmatrix}\right| \quad \text{(多重線型性で定数倍を外に出した.)} \\
&= (x + 3y)\left|\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x - y & 0 & 0 \\ 1 & 0 & x - y & 0 \\ 1 & 0 & 0 & x - y \end{pmatrix}\right| = (x + 3y)(x - y)^3.
\end{aligned}$$

□

問題 2 補足解説. 本問では，行列式を全て展開して計算した後に因数分解をすることももちろん可能であるが，行列式の性質を用いれば初めから因数分解された形で綺麗に計算できるということを学んでもらいたい．

(2) は少し思いつきにくいかもしれないが，各行 (あるいは列) の和が等しいことに着目すると，解答例の方法で全てが 1 という扱いやすい列ベクトルを作ることができるということに気付くことができる．十分この計算に慣れれば，同様の $n \times n$ 行列も同じ方法で以下のようになることが理解できるであろう：

$$\left| \begin{pmatrix} x & y & \dots & y & y \\ y & x & \dots & y & y \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y & y & \dots & x & y \\ y & y & \dots & y & x \end{pmatrix} \right| = (x + (n-1)y)(x-y)^{n-1}.$$

【以下は講義の少し先取りの内容である】

(1) の別解の方法は，"実質的な計算" をほとんどしていないという点で面白い方法であると言える．また，この方法は n 次正方行列の場合にも同様に適用可能である (サラスの公式の部分だけ修正する必要があるが，それは次回学ぶ具体的な行列式の表示を用いれば修正可能である)．つまり，以下が成立する:

$$\left| \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \right| = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i).$$

これは**ファンデルモンド** *(Vandermonde)* **行列式**と呼ばれる．また，右辺の積は**差積**と呼ばれる．特に，この行列式の値が 0 でないことの必要十分条件が

任意の相異なる i, j について $x_i \neq x_j$

であることに注意する．この行列式は応用上も重要なので，今後の講義でも再び扱う． □