線形代数 II 第 3 回レポート課題解答例

担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)*

問題 1

次の行列式の値を求めよ．(今回の講義内容の復習のため余因子展開で求めてみることが望ましい．)

$$\left|\begin{pmatrix} 2 & -8 & 3 & 0 & 6 & 0 & 8 \\ 7 & 7 & 6 & 1 & 5 & 2 & 4 \\ 4 & -1 & 9 & 0 & 0 & 0 & -8 \\ 6 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 8 & 0 & 9 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 0 & -3 & 0 & 8 \end{pmatrix}\right|.$$

問題 1 解答例.

$$\begin{aligned}
\left|\begin{pmatrix} 2 & -8 & 3 & 0 & 6 & 0 & 8 \\ 7 & 7 & 6 & 1 & 5 & 2 & 4 \\ 4 & -1 & 9 & 0 & 0 & 0 & -8 \\ 6 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 8 & 0 & 9 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 0 & -3 & 0 & 8 \end{pmatrix}\right|
&= (-1)^{1+6}\left|\begin{pmatrix} -8 & 3 & 0 & 6 & 0 & 8 \\ 7 & 6 & 1 & 5 & 2 & 4 \\ -1 & 9 & 0 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 8 & 0 & 9 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & -3 & 0 & 8 \end{pmatrix}\right| \quad (\text{第 6 行に関して余因子展開}) \\
&= -(-1)^{2+3}\left|\begin{pmatrix} -8 & 3 & 6 & 0 & 8 \\ -1 & 9 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 8 & 9 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -3 & 0 & 8 \end{pmatrix}\right| \quad (\text{第 3 列に関して余因子展開}) \\
&= (-1)^{3+2}\left|\begin{pmatrix} -8 & 6 & 0 & 8 \\ -1 & 0 & 0 & -8 \\ 5 & 9 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 0 & 8 \end{pmatrix}\right| \quad (\text{第 3 行に関して余因子展開}) \\
&= -(-1)^{3+3}\left|\begin{pmatrix} -8 & 6 & 8 \\ -1 & 0 & -8 \\ 2 & -3 & 8 \end{pmatrix}\right| \quad (\text{第 3 列に関して余因子展開}) \\
&= -(0 + (-96) + 24 - (-192) - (-48) - 0) \quad (\text{サラスの公式}) \\
&= -168.
\end{aligned}$$

□

問題 1 補足解説. 余因子展開のコツは「0 が多い行あるいは列に関して展開する」ことである．ただし，余因子に現れる符号 $(-1)^{i+j}$ には注意をすること．これは以下のように図示される：

$$\begin{pmatrix} + & - & + & \cdots \\ - & + & - & \cdots \\ + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

* *e-mail*：hoya@shibaura-it.ac.jp

余因子展開. $n \times n$ 行列

$$A = (a_{i,j})_{i,j=1,\dots,n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

に対して，以下が成立する：任意の $j = 1, \dots, n$ に対し，

$$\begin{aligned} |A| &= a_{j1}\widetilde{a_{j1}} + a_{j2}\widetilde{a_{j2}} + \dots + a_{jn}\widetilde{a_{jn}} \quad (\text{第 } j \text{ 行に関する余因子展開}) \\ &= a_{1j}\widetilde{a_{1j}} + a_{2j}\widetilde{a_{2j}} + \dots + a_{nj}\widetilde{a_{nj}} \quad (\text{第 } j \text{ 列に関する余因子展開}) \end{aligned}$$

ここで，$\widetilde{a_{ij}} := (-1)^{i+j}|\check{A}_{ij}|$，ただし，$\check{A}_{ij}$ は A から i 行，j 列を取り除いて得られる $(n-1) \times (n-1)$ 行列である．$\widetilde{a_{ij}}$ を (i,j)-**余因子**と呼ぶ.

なお，第 1 行に関する余因子展開は行列式の定義に他ならない．これを他の行，列に変えても同じ値が出るということが定理である． □

問題 2

A を $n \times n$ 行列とするとき，以下の問に答えよ.

(1) $|A| = 3$ のとき，$|2A|$ の値を求めよ.

(2) A が ${}^tA = -A$ を満たし (このような A を**交代行列**と呼ぶ)，行列のサイズ n が奇数であるとする．このとき，$|A|$ の値を求めよ.

(3) A が ${}^tA = A$ を満たすとき (このような A を**対称行列**と呼ぶ)，余因子行列 $\widetilde{A}$ も ${}^t(\widetilde{A}) = \widetilde{A}$ を満たすことを証明せよ.

問題 2 解答例.

(1) A を $A = (\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n)$(ただし，各 $\boldsymbol{a}_k$ は $n \times 1$ 行列) と表示すると，多重線型性より，

$$|2A| = |(2\boldsymbol{a}_1, \dots, 2\boldsymbol{a}_n)| = 2^n\,|(\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n)| = 2^n|A| = 3 \cdot 2^n.$$

□

(2) A を $A = (\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n)$(ただし，各 $\boldsymbol{a}_k$ は $n \times 1$ 行列) と表示すると，転置不変性と多重線型性より，

$$|A| = |{}^tA| = |-A| = |(-\boldsymbol{a}_1, \dots, -\boldsymbol{a}_n)| = (-1)^n\,|(\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n)| = (-1)^n|A|.$$

いま，n が奇数であるので，$|A| = -|A|$．よって，$|A| = 0$. □

(3) A から i 行，j 列を取り除いて得られる $(n-1) \times (n-1)$ 行列を $\check{A}_{ij}$ と書くと，A は対称行列なので，任意の $i, j = 1, \dots, n$ に対し，

$${}^t(\check{A}_{ji}) = (\check{{}^tA})_{ij} = \check{A}_{ij}.$$

これより，A の (i,j)-余因子を $\widetilde{a_{ij}}$ と書くと，

$$\widetilde{a_{ji}} = (-1)^{j+i}|\check{A}_{ji}| = (-1)^{j+i}|{}^t(\check{A}_{ji})| = (-1)^{i+j}|\check{A}_{ij}| = \widetilde{a_{ij}}.$$

よって，余因子行列 $\widetilde{A}$ は対称行列である． □

問題 2 補足解説. (1) の解答例で "2" の部分を "k" とすることで，一般に任意の定数 k と $n \times n$ 行列 A に対して，

$$|kA| = k^n|A|$$

となることが証明できる． □