線形代数 II 第 4 回レポート課題解答例

担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)*

問題 1

n 次元空間 $\mathbb{R}^n$ において，ベクトル $\boldsymbol{a} = (a_1, \dots, a_n)$ と $\boldsymbol{a}' = (a'_1, \dots, a'_n)$ が**直交する**とは

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}' = a_1 a'_1 + a_2 a'_2 + \cdots + a_n a'_n = 0$$

となることとする．(これは 2 次元，3 次元の時は "普通の" 直交であることに注意．)

(1) $\mathbb{R}^3$ において $(1, 2, -5)$，$(3, 4, 4)$ の両方に直交するベクトルを 1 つ挙げよ．

(2) $\mathbb{R}^4$ において $(1, 1, 1, 1)$，$(-7, 2, 0, -1)$，$(-2, 1, 7, -9)$ の全てに直交するベクトルを 1 つ挙げよ．

問題 1 解答例．

(1)

$$\left(\left| \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \right|, - \left| \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \right|, \left| \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \right| \right) = (28, -19, -2)$$

□

(2)

$$\begin{aligned}
&\left(\left| \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 7 & -9 \end{pmatrix} \right|, - \left| \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -7 & 0 & -1 \\ -2 & 7 & -9 \end{pmatrix} \right|, \left| \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -7 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & -9 \end{pmatrix} \right|, - \left| \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -7 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 7 \end{pmatrix} \right| \right) \\
&= \left(\left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -3 \\ 1 & 6 & -10 \end{pmatrix} \right|, - \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -7 & 7 & 6 \\ -2 & 9 & -7 \end{pmatrix} \right|, \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -7 & 9 & 6 \\ -2 & 3 & -7 \end{pmatrix} \right|, - \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -7 & 9 & 7 \\ -2 & 3 & 9 \end{pmatrix} \right| \right) \\
&= \left(\left| \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 6 & -10 \end{pmatrix} \right|, - \left| \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 9 & -7 \end{pmatrix} \right|, \left| \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 3 & -7 \end{pmatrix} \right|, - \left| \begin{pmatrix} 9 & 7 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} \right| \right) \\
&= (38, 103, -81, -60)
\end{aligned}$$

□

注意．本問は**検算できる問**なので，時間のある場合にはきちんと**検算すること**．

問題 1 補足解説．まず余因子に関する以下の定理を思い出す：

定理． $n \times n$ 行列

$$A = (a_{i,j})_{i,j=1,\dots,n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

に対して，以下が成立する：

$$a_{i1}\widetilde{a_{j1}} + a_{i2}\widetilde{a_{j2}} + \cdots + a_{in}\widetilde{a_{jn}} = a_{1i}\widetilde{a_{1j}} + a_{2i}\widetilde{a_{2j}} + \cdots + a_{ni}\widetilde{a_{nj}} = \begin{cases} |A| & i = j \text{ のとき，} \\ 0 & i \neq j \text{ のとき，} \end{cases}$$

ここで，$\widetilde{a_{ij}}$ は A の (i, j)-**余因子** $(-1)^{i+j}|\check{A}_{ij}|$ である．($\check{A}_{ij}$ は A から i 行，j 列を取り除いて得られる $(n-1) \times (n-1)$ 行列．)

* *e-mail*：hoya@shibaura-it.ac.jp

上の定理の $i \neq j$ のときの場合は，

$$\widetilde{\boldsymbol{a}} = (\widetilde{a_{11}}, \widetilde{a_{12}}, \dots, \widetilde{a_{1n}})$$

が $(a_{j1}, a_{j2}, \dots, a_{jn})$，$j = 2, 3, \dots, n$ らと全て直交するということを言っていることに他ならない！また，$\widetilde{\boldsymbol{a}}$ の各成分は 1 行目の値 $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{n1}$ には依らないことに注意する．

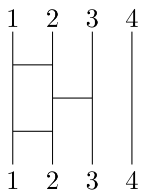
この性質を用いれば本問で問われているようなベクトルを求めることができる．実際，(1) の解答は $A = \begin{pmatrix} x & y & z \\ 1 & 2 & -5 \\ 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ に対応する $\widetilde{\boldsymbol{a}}$ であり，(2) の解答は $A = \begin{pmatrix} x & y & z & w \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -7 & 2 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 7 & -9 \end{pmatrix}$ に対応する $\widetilde{\boldsymbol{a}}$ である． □

問題 2 解答例

$\mathfrak{S}_4$の元 σ	逆元 σ^{-1}	符号	$\mathfrak{S}_4$の元 σ	逆元 σ^{-1}	符号	$\mathfrak{S}_4$の元 σ	逆元 σ^{-1}	符号
$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}$	1	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&1&4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&2&4\end{pmatrix}$	1	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix}$	1
$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&4&3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&4&3\end{pmatrix}$	-1	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix}$	-1	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&2&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&1&2\end{pmatrix}$	-1
$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&2&4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&2&4\end{pmatrix}$	-1	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&1&3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&4&2\end{pmatrix}$	-1	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}$	-1
$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&4&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&2&3\end{pmatrix}$	1	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&3&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&3&2\end{pmatrix}$	1	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&3&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&3&1\end{pmatrix}$	1
$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&2&3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&4&2\end{pmatrix}$	1	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&2&4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&1&4\end{pmatrix}$	1	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&2&1&3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&4&1\end{pmatrix}$	1
$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&3&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&3&2\end{pmatrix}$	-1	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&4&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&1&3\end{pmatrix}$	-1	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&2&3&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&2&3&1\end{pmatrix}$	-1
$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&3&4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&3&4\end{pmatrix}$	-1	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&1&4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&1&4\end{pmatrix}$	-1	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&1&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&2&1\end{pmatrix}$	-1
$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}$	1	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&4&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&2&1&3\end{pmatrix}$	1	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix}$	1

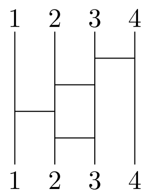
問題 2 補足解説． 符号はあみだくじの絵で考えるのがわかりやすいだろう．例えば以下のようになる．

$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&1&4\end{pmatrix}$:



符号
$(-1)^3 = -1$

$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&4&1\end{pmatrix}$:



符号
$(-1)^4 = 1$

逆元 σ^{-1} を求めるには，2 列に並んだ数字の上下を入れ替え，その後上下の数字の対応を保ったまま上の段の数字を $1, 2, \dots, n$ の順に並ぶようにすればよい．このとき，$\mathrm{sgn}(\sigma) = \mathrm{sgn}(\sigma^{-1})$ が全ての $\sigma \in \mathfrak{S}_4$ に対して成立していることも確認しておいてほしい．

本問で求めた符号より，$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$ としたとき，

$$\begin{aligned} |A| = & a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} - a_{11}a_{22}a_{34}a_{43} - a_{11}a_{23}a_{32}a_{44} + a_{11}a_{23}a_{34}a_{42} \\ & + a_{11}a_{24}a_{32}a_{43} - a_{11}a_{24}a_{33}a_{42} - a_{12}a_{21}a_{33}a_{44} + a_{12}a_{21}a_{34}a_{43} \\ & + a_{12}a_{23}a_{31}a_{44} - a_{12}a_{23}a_{34}a_{41} - a_{12}a_{24}a_{31}a_{43} + a_{12}a_{24}a_{33}a_{41} \\ & + a_{13}a_{21}a_{32}a_{44} - a_{13}a_{21}a_{34}a_{42} - a_{13}a_{22}a_{31}a_{44} + a_{13}a_{22}a_{34}a_{41} \\ & + a_{13}a_{24}a_{31}a_{42} - a_{13}a_{24}a_{32}a_{41} - a_{14}a_{21}a_{32}a_{43} + a_{14}a_{21}a_{33}a_{42} \\ & + a_{14}a_{22}a_{31}a_{43} - a_{14}a_{22}a_{33}a_{41} - a_{14}a_{23}a_{31}a_{42} + a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}. \end{aligned}$$

であることがわかる．これは当然覚えなくて良いが，「たすき掛け型・サラスの公式型**ではない！**」ということは覚えておいてほしい．(明らかに項の数が多い．ちなみに 5×5 だと $5! = 120$ 項ある．) □