線形代数 II 第 5 回レポート課題解答例

担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)*

問題 1

以下に挙げる行列がそれぞれ逆行列を持つかどうか判定せよ．

(1) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

問題 1 解答例.

(1)

$$\left|\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}\right| = 8+0+0-2-2-0 = 4 \neq 0 \quad \text{(サラスの方法)}$$

より，逆行列を持つ． □

(2)

$$\begin{aligned}
\left|\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}\right| &= \left|\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\right| \quad \text{(第 1，2，3 列を第 4 列に加えた.)} \\
&= 0 \quad \text{(第 4 列が全て 0 となったため.)}
\end{aligned}$$

より，逆行列を持たない． □

(3)

$$\begin{aligned}
\left|\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}\right| &= \left|\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\right| \quad \text{(第 5 列を第 4 列に加えた.)} \\
&= 2\left|\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\right| \quad \text{(第 5 行に関して余因子展開.)} \\
&= 2\left|\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right| \quad \text{(第 4 列を第 3 列に加えた.)} \\
&= 2\left|\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\right| \quad \text{(第 4 行に関して余因子展開.)} \\
&= 4+0+0-2-0-2 = 0 \quad \text{(サラスの方法)}
\end{aligned}$$

より，逆行列を持たない． □

* *e-mail*：hoya@shibaura-it.ac.jp

問題 1 補足解説. n 次正方行列 A に対し,

$$|A| \neq 0 \Leftrightarrow A \text{ が逆行列を持つ}$$

であったので，逆行列を持つかどうかを見るためには行列式の値が 0 になるかどうかを見ればよい.

行列 (1) の逆行列の具体形は $\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ である．(2) は「どの行 (あるいは列) もその数を全て足すと 0 になる」というパターンである．(第 2 回レポート課題解答例の問題 1 補足解説参照．) □

問題 2

(1) n 次正方行列 A が ${}^tAA = I_n$ を満たすとき (このような A を**直交行列**と呼ぶ)，$|A|$ の取りうる値を全て求めよ.

(2) n 次正方行列 A が $|A| \neq 0$ を満たすとき，A の余因子行列 $\widetilde{A}$ の行列式の値 $|\widetilde{A}|$ を $|A|$ を用いて表せ.

(3) 3 次正方行列 A が，逆行列を持つ 3 次正方行列 P を用いて,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \quad a, b, c \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, (\text{ただし，} a < b < c)$$

と書けたとする．$|A| = 6$ のとき，a, b, c の値を求めよ.

問題 2 解答例.

(1) 行列式の正規化条件，積に関する性質，転置不変性より,

$$1 = |I_n| = |{}^tAA| = |{}^tA||A| = |A|^2$$

となるので，$|A|$ の取りうる値は $1, -1$. □

(2) 行列式の積に関する性質と $A\widetilde{A} = |A|I_n$ より,

$$|A||\widetilde{A}| = |A\widetilde{A}| = ||A|I_n| = |A|^n$$

となる．$|A| \neq 0$ より，両辺 $|A|$ で割って，$|\widetilde{A}| = |A|^{n-1}$. □

(3) 行列式の積に関する性質より,

$$6 = |A| = \frac{1}{|P|}|A||P| = |P^{-1}||A||P| = |P^{-1}AP| = \left|\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}\right| = abc.$$

いま，a, b, c は $a < b < c$ となる 0 以上の整数なので，これを満たす (a, b, c) は $(1, 2, 3)$ のみ. □

問題 2(3) 補足解説. n 次正方行列 A に対し，逆行列を持つ n 次正方行列 P(このような P を n 次**正則行列**という) が存在して，$P^{-1}AP$ が対角行列になるとき，A を**対角化可能**という．また，この操作を A の**対角化**という．A の対角化はいつでもできるわけではないことに注意する.

(3) の解答 2 行目と同様の計算は $n \times n$ 行列の場合にも行うことができ，一般に

$$|P^{-1}AP| = |A|$$

となる．これより，行列式の計算は「A を対角化したときの対角成分の積の計算」ということもできる．この考え方は後にも重要になる. □