線形代数 II 第 6 回レポート課題解答例

担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)*

問題 1

(1) 次の連立 1 次方程式を，クラメルの公式を用いて解け．

$$\begin{cases} -4x+4y-7z=-2 \\ -y+4z=6 \\ -x+y-2z=-1 \end{cases}$$

(2) a を $a>1$ を満たす実数の定数としたとき，x,y,z に関する連立一次方程式

$$\begin{cases} ax+y+z=1 \\ x+ay+z=2 \\ x+y+az=3 \end{cases}$$

の解 (x_0,y_0,z_0) は a の値によって異なる．このため，この解を a についての関数と考えて $(x_0,y_0,z_0)=(f(a),g(a),h(a))$ と書く．このとき，$\lim_{a\to\infty} f(a)$，$\lim_{a\to\infty} g(a)$，$\lim_{a\to\infty} h(a)$ を求めよ．

問題 1 解答例．

(1) クラメルの公式より，

$$A=\begin{pmatrix} -4 & 4 & -7 \\ 0 & -1 & 4 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad D_1=\begin{pmatrix} -2 & 4 & -7 \\ 6 & -1 & 4 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad D_2=\begin{pmatrix} -4 & -2 & -7 \\ 0 & 6 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \quad D_3=\begin{pmatrix} -4 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & 6 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

としたとき，求める解は $x=\dfrac{|D_1|}{|A|}$, $y=\dfrac{|D_2|}{|A|}$, $z=\dfrac{|D_3|}{|A|}$ である．ここで，

$$|A|=\left|\begin{pmatrix} -4 & 4 & -7 \\ 0 & -1 & 4 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\right|=-1 \qquad |D_1|=\left|\begin{pmatrix} -2 & 4 & -7 \\ 6 & -1 & 4 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\right|=1$$

$$|D_2|=\left|\begin{pmatrix} -4 & -2 & -7 \\ 0 & 6 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}\right|=-2 \qquad |D_3|=\left|\begin{pmatrix} -4 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & 6 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\right|=-2$$

なので，求める解は $(x,y,z)=(-1,2,2)$ である． □

(2) クラメルの公式より，

$$A=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \qquad D_1=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & a & 1 \\ 3 & 1 & a \end{pmatrix} \qquad D_2=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & a \end{pmatrix} \qquad D_3=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

としたとき，$f(a)=\dfrac{|D_1|}{|A|}$, $g(a)=\dfrac{|D_2|}{|A|}$, $h(a)=\dfrac{|D_3|}{|A|}$ である．ここで，行列式の具体的表示から，$|A|$ は a に関する 3 次式，$|D_1|,|D_2|,|D_3|$ は a に関する 2 次式であるので，

$$\lim_{a\to\infty} f(a)=\lim_{a\to\infty} g(a)=\lim_{a\to\infty} h(a)=0.$$

□

* *e-mail*: hoya@shibaura-it.ac.jp

問題 1 補足解説. まずクラメルの公式を思い出す：

クラメルの公式. $A = (\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n)$ を n 次正方行列 (つまり，各 $\boldsymbol{a}_k$ は n 次元縦ベクトル．)，$\boldsymbol{c}$ を n 次元縦ベクトルとする．このとき，$x_1, x_2, \dots, x_n$ に関する連立一次方程式

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}, \text{ ただし，} \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

の解は

$$x_k = \frac{\left| (\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_{k-1}, \overset{\overset{k}{\vee}}{\boldsymbol{c}}, \boldsymbol{a}_{k+1}, \dots, \boldsymbol{a}_n) \right|}{|A|}, \; k = 1, \dots, n.$$

(1) の計算を試された方は実感されたと思われるが，クラメルの公式を用いて連立一次方程式を解くためには多くの行列式の計算が必要となる．このため，(1) のような具体的な問題に対しては掃き出し法を用いて計算する方が実際には現実的である．しかし，クラメルの公式という「解の公式」が存在していることは，方程式の係数と解がどのように関連しているのかを具体的に記述できているという意味で数学的に重要である．例えば，(2) のような問題は，クラメルの方法を念頭に置くと具体的に計算する必要が無いことがわかる．

なお，(2) の連立方程式を

$$\begin{cases} x + \frac{y}{a} + \frac{z}{a} = \frac{1}{a} \\ \frac{x}{a} + y + \frac{z}{a} = \frac{2}{a} \\ \frac{x}{a} + \frac{y}{a} + z = \frac{3}{a} \end{cases}$$

と書きなおすと，この連立方程式は $a \to \infty$ としたとき，

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

に近づくので，$\lim_{a\to\infty} f(a) = \lim_{a\to\infty} g(a) = \lim_{a\to\infty} h(a) = 0$ となることは感覚的には自然である，(ただし，この議論はもう少し説明しないと厳密な証明とは言えない．) ちなみに，$f(a), g(a), h(a)$ の具体形は，

$$f(a) = \frac{a-4}{(a+2)(a-1)} \qquad g(a) = \frac{2}{a+2} \qquad h(a) = \frac{3a}{(a+2)(a-1)}$$

である． □

問題 2

3 次元空間 $\mathbb{R}^3$ における 4 点 A : $(1, 2, 3)$，B : $(-2, 5, -1)$，C : $(3, 5, 0)$，D : $(4, -1, 6)$ を頂点とする三角錐の体積を求めよ．

問題 2 解答例. 三角錐 ABCD の符号付き体積は，

$$\frac{1}{6}\left|\begin{pmatrix} -2-1 & 3-1 & 4-1 \\ 5-2 & 5-2 & -1-2 \\ -1-3 & 0-3 & 6-3 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{6}\left|\begin{pmatrix} -3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & -3 \\ -4 & -3 & 3 \end{pmatrix}\right| = \frac{15}{6} = \frac{5}{2}.$$

よって，求める体積は $\frac{5}{2}$． □

問題 2 補足解説. 行列式と立体の体積との関係の詳細については次ページ以降を参照のこと．$\mathbb{R}^3$ の 4 点 A : (a_1, a_2, a_3)，B : (b_1, b_2, b_3)，C : (c_1, c_2, c_3)，D : (d_1, d_2, d_3) を頂点とする三角錐の符号付き体積は，

$$\frac{1}{6}\left|\begin{pmatrix} b_1-a_1 & c_1-a_1 & d_1-a_1 \\ b_2-a_2 & c_2-a_2 & d_2-a_2 \\ b_3-a_3 & c_3-a_3 & d_3-a_3 \end{pmatrix}\right|$$

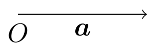
で与えられた．この値に絶対値を付けたものが，三角錐 ABCD の体積となる． □

行列式の応用：平行体の体積

以下では，実数の絶対値を扱うので，混乱を避けるために行列 A の行列式を $|A|$ ではなく $\det A$ と書くことにし，$|\cdot|$ は絶対値記号を表すことにする．

まず，1 次元空間 $\mathbb{R}$ におけるベクトル $\boldsymbol{a} = (a), a \in \mathbb{R}(1 \times 1$ 行列$)$ を考える．これは原点を端点とする線分

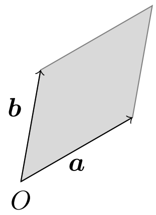
$$P(\boldsymbol{a}) = \{ta \in \mathbb{R} \mid 0 \leq t \leq 1\}$$

$P(\boldsymbol{a})$ 

を定め，その長さは $\boxed{|a| = |\det(\boldsymbol{a})|}$ である．

次に，2 次元空間 $\mathbb{R}^2$ におけるベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ を考える．これは原点を頂点の 1 つとする平行四辺形

$$P(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \left\{t_1\boldsymbol{a} + t_2\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq t_1 \leq 1, 0 \leq t_2 \leq 1\right\}$$

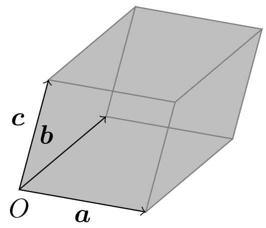
$P(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ 

を定め，その面積は $\boxed{|a_1b_2 - b_1a_2| = |\det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})|}$ である．

以上の話の 3 次元空間 $\mathbb{R}^3$ への拡張を考えよう．

まず，$\mathbb{R}^3$ から 3 つのベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ をとる．ここから 1 次元，2 次元のときの類似で平行六面体 $P(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ を以下のように定義する．

$$P(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \left\{t_1\boldsymbol{a} + t_2\boldsymbol{b} + t_3\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq t_1 \leq 1, 0 \leq t_2 \leq 1, 0 \leq t_3 \leq 1\right\}$$

$P(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ 

この立体の体積 $\mathrm{vol}_3\, P(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ を考えよう．(“vol” は volume(体積) の頭 3 文字．)

体積 vol_3 は以下の性質を満たす：

(V1) 任意の $\sigma \in \mathfrak{S}_3$(3 次対称群) に対し，

$$\mathrm{vol}_3\, P(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) = \mathrm{vol}_3\, P(\boldsymbol{a}_{\sigma(1)}, \boldsymbol{a}_{\sigma(2)}, \boldsymbol{a}_{\sigma(3)}).$$

(最初にとるベクトルの順番を変えても出来上がる立体は変わらない．)

(V2) $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2 \in \mathbb{R}^3$ の第 3 成分が共に 0 で，$\boldsymbol{a}_3 \in \mathbb{R}^3$ の第 3 成分が h のとき，

$$\mathrm{vol}_3\, P(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) = |h|\, \mathrm{vol}_2\, P(\overline{\boldsymbol{a}_1}, \overline{\boldsymbol{a}_2})$$

ただし，$\overline{\boldsymbol{a}_1}, \overline{\boldsymbol{a}_2}$ は $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ から 0 である第 3 成分を除いてできる 2 次元列ベクトル．$\mathrm{vol}_2\, P(\overline{\boldsymbol{a}_1}, \overline{\boldsymbol{a}_2})$ は平行四辺形 $P(\overline{\boldsymbol{a}_1}, \overline{\boldsymbol{a}_2})$ の面積.

($\mathbb{R}^3$ の第 $1, 2, 3$ 成分をそれぞれ x, y, z 座標とすると，「$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ の第 3 成分が共に 0」という条件は $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ によって作られる平行四辺形が xy 平面に含まれるという条件である．よって，この平行四辺形を平行六面体の底面と見るとその高さは $\boldsymbol{a}_3$ の z 座標の絶対値となるので，$P(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$ の体積が底面積 $\times$ 高さで与えられることから，この等式が成立する．)

(V3) 任意の $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ に対し，

$$\mathrm{vol}_3\, P(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) = \mathrm{vol}_3\, P(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \alpha\boldsymbol{a}_1 + \beta\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3).$$

($\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ によって作られる平行四辺形を平行六面体の底面と見て考えると，この底面に平行なベクトルで $\boldsymbol{a}_3$ をスライドさせても平行六面体の高さは変わらないので体積も不変．)

ここで，(V1) より，ベクトルの並び方には特に理由はないことから，(V2) で $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ を任意に入れ替えたバージョンも成立することに注意する，例えば，$\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3 \in \mathbb{R}^3$ の第 3 成分が共に 0 で，$\boldsymbol{a}_1 \in \mathbb{R}^3$ の第 3 成分が h のとき，

$$\mathrm{vol}_3\, P(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) = |h|\, \mathrm{vol}_2\, P(\overline{\boldsymbol{a}_2}, \overline{\boldsymbol{a}_3})$$

である．同様に，(V3) で $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ を任意に入れ替えたバージョンも成立するので，これにより $i \neq j$ のとき，第 i 番目の列ベクトルの定数倍を第 j 番目に加えても，vol_3 は不変ということがわかる．これは行列式が持つ性質と同じである．

さて，実は (V1)，(V2)，(V3) を用いれば vol_3 は完全に計算できる．つまり，(V1)，(V2)，(V3) は体積 vol_3 の特徴づけを与える．それは以下のように行えばよい：

i) $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ の第 3 成分が全て 0 のとき．
(V2) より，

$$\mathrm{vol}_3 P(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) = 0 \times \mathrm{vol}_2 P(\overline{\boldsymbol{a}_1}, \overline{\boldsymbol{a}_2}) = 0.$$

(立体は潰れている．)

ii) $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ の中に 0 でない第 3 成分 (h とする) を持つベクトルが存在するとき．
(V1) より，適当にベクトルを並べ替えて，0 でない第 3 成分を持つベクトルは $\boldsymbol{a}_3$ であるとして良い．このとき，$\boldsymbol{a}_1$ と $\boldsymbol{a}_2$ の第 3 成分が 0 となるように $\boldsymbol{a}_3$ の定数倍を加えて (“掃き出し法”)，出来上がったベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{a}'_1$，$\boldsymbol{a}'_2$ とすると，(V1) と (V3) から $\boldsymbol{a}_1$ と $\boldsymbol{a}_2$ に $\boldsymbol{a}_3$ の定数倍を加えても体積は不変なので，

$$\mathrm{vol}_3 P(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) = \mathrm{vol}_3 P(\boldsymbol{a}'_1, \boldsymbol{a}'_2, \boldsymbol{a}_3)$$

である．ここで，右辺は (V2) が使える状況になっているので，結局求める体積は

$$\mathrm{vol}_3 P(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) = |h| \, \mathrm{vol}_2 P\left(\overline{\boldsymbol{a}'_1}, \overline{\boldsymbol{a}'_2}\right).$$

ii) の計算は例で見てみると以下のようになる．$\mathrm{vol}_3 P\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\5\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix}\right)$ を計算してみよう．まず，第 3 成分が 0 でないベクトルは 1 番目か 3 番目の列ベクトルだが，後で “掃き出し” を行うことを考えると小さい数字を基準にした方が考えやすいので 1 番目のベクトルを 3 番目に持ってくる．[*1]

$$\mathrm{vol}_3 P\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\5\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix}\right) = \mathrm{vol}_3 P\left(\begin{pmatrix}4\\5\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right)$$

次に，$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ の定数倍を他のベクトルに加えてこれ以外の第 3 成分を 0 にする．(“掃き出し”)

$$\mathrm{vol}_3 P\left(\begin{pmatrix}4\\5\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right) = \mathrm{vol}_3 P\left(\begin{pmatrix}4\\5\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right)$$

これで，(V2) が使える形となったので，結局求める体積は，

$$\mathrm{vol}_3 P\left(\begin{pmatrix}4\\5\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right) = 3 \, \mathrm{vol}_2 P\left(\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}\right) = 3|4 \times 2 - 4 \times 5| = 36.$$

この考え方を元にすると $\mathrm{vol}_3 P(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$ は 1, 2 次元の場合と同様に行列式を用いて計算できることがわかる：

定理．

$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3 \in \mathbb{R}^3$ のなす平行六面体 $P(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$ の体積 $\mathrm{vol}_3 P(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$ は以下を満たす：

$$\mathrm{vol}_3 P(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) = |\det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)|.$$

[*1] この操作は本質的には不要だが ii) の議論に形式的に従うために行った．

定理の証明. 3 つのベクトル $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$ を与えたときにそれらがなす平行六面体の体積 $\mathrm{vol}_3\, P(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$ を与えるという対応は (V1)，(V2)，(V3) の性質を満たす関数

$$\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

としてただ 1 つに定まっている．これより，関数

$$\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) \mapsto |\det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)|$$

が (V1)，(V2)，(V3) を満たすことを確かめれば，関数としてこれらが一致し，特に

$$\mathrm{vol}_3\, P(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) = |\det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)|$$

であることがわかる．以下順に確認する：
<u>(V1) を満たすこと：</u>交代性より，任意の $\sigma \in \mathfrak{S}_3$ に対し，

$$\left|\det(\boldsymbol{a}_{\sigma(1)}, \boldsymbol{a}_{\sigma(2)}, \boldsymbol{a}_{\sigma(3)})\right| = |\mathrm{sgn}(\sigma) \det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)| = |\det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)|. \quad (\mathrm{sgn}(\sigma) \text{ は } 1 \text{ か } -1 \text{ なので})$$

<u>(V2) を満たすこと：</u>$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2 \in \mathbb{R}^3$ の第 3 成分が共に 0 で，$\boldsymbol{a}_3 \in \mathbb{R}^3$ の第 3 成分が h のとき，第 3 行に関する余因子展開から，

$$|\det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)| = |h \det(\overline{\boldsymbol{a}_1}, \overline{\boldsymbol{a}_2})| = |h|\, |\det(\overline{\boldsymbol{a}_1}, \overline{\boldsymbol{a}_2})| = |h|\, \mathrm{vol}_2\, P(\overline{\boldsymbol{a}_1}, \overline{\boldsymbol{a}_2}).$$

<u>(V3) を満たすこと：</u>$i \neq j$ のとき，行列の第 i 列の定数倍を第 j 列に加えても行列式の値は変わらないので，

$$|\det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)| = |\det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \alpha\boldsymbol{a}_1 + \beta\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3)|.$$

以上より示すべきことは示された． □

この定理より，

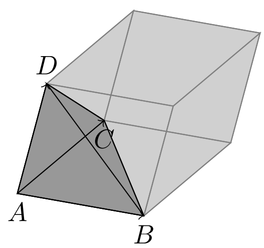
3 次正方行列の行列式はその 3 つの列ベクトルのなす平行六面体の符号付き体積

と言うことができる．この考え方は多変数の積分の変数変換を行うときに現れる**ヤコビアン** *(Jacobian)* を理解するのに役に立つ．

また，$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ によって作られる<u>三角錐</u>は $P(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ の体積の $\dfrac{1}{6}$ であったことと，$P(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ は原点を基準に作っていたことを思い出すと，一般に $\mathbb{R}^3$ の 4 点 $\mathrm{A} : (a_1, a_2, a_3)$，$\mathrm{B} : (b_1, b_2, b_3)$，$\mathrm{C} : (c_1, c_2, c_3)$，$\mathrm{D} : (d_1, d_2, d_3)$ を頂点とする三角錐の体積は，

$$\frac{1}{6}\left|\begin{pmatrix} b_1 - a_1 & c_1 - a_1 & d_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 & c_2 - a_2 & d_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 & c_3 - a_3 & d_3 - a_3 \end{pmatrix}\right|$$

であることがわかる．(問題 2)



[ここから発展] 以上の話は全て n 次元 $\mathbb{R}^n$ の場合に拡張できる．$\mathbb{R}^n$ から任意に n 個の元 $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ を取り，以下の n 次元平行体を考える：

$$P(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n) = \{t_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + t_n\boldsymbol{a}_n \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq t_i \leq 1, i = 1, \ldots, n\}$$

このとき，この立体の “体積” を 3 次元の場合の類似として以下のように<u>帰納的に定義する</u>：

- まず，$n = 1$ のときは $\mathrm{vol}_1(P(a)) = |a|, a \in \mathbb{R}$ とし，$n = 2$ のときは，$\mathrm{vol}_2\, P(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = |\det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})|$ とする．

- $n \geq 3$ のとき，以下の $(\mathrm{V1})_{n-1}$，$(\mathrm{V2})_{n-1}$，$(\mathrm{V3})_{n-1}$ を満たす関数

$$\mathrm{vol}_{n-1} \colon \underbrace{\mathbb{R}^{n-1} \times \cdots \times \mathbb{R}^{n-1}}_{(n-1)\text{ 個}} \to \mathbb{R}, (\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{n-1}) \mapsto \mathrm{vol}_{n-1} P(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{n-1})$$

が定まっていると仮定した上で，以下の $(\mathrm{V1})_n$，$(\mathrm{V2})_n$，$(\mathrm{V3})_n$ を満たす関数

$$\mathrm{vol}_n \colon \underbrace{\mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n}_{n\text{ 個}} \to \mathbb{R}, (\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n) \mapsto \mathrm{vol}_n P(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$$

を考える．(vol_2 は $(\mathrm{V1})_2$，$(\mathrm{V2})_2$，$(\mathrm{V3})_2$ を満たすことに注意．)

$(\mathrm{V1})_n$ 任意の $\sigma \in \mathfrak{S}_n$($n$ 次対称群) に対し，

$$\mathrm{vol}_n P(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n) = \mathrm{vol}_n P(\boldsymbol{a}_{\sigma(1)}, \ldots, \boldsymbol{a}_{\sigma(n)}).$$

$(\mathrm{V2})_n$ $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{n-1} \in \mathbb{R}^n$ の第 n 成分が全て 0 で，$\boldsymbol{a}_n \in \mathbb{R}^n$ の第 n 成分が h のとき，

$$\mathrm{vol}_n P(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n) = |h| \, \mathrm{vol}_{n-1} P(\overline{\boldsymbol{a}_1}, \ldots, \overline{\boldsymbol{a}_{n-1}})$$

ただし，$\overline{\boldsymbol{a}_1}, \ldots, \overline{\boldsymbol{a}_{n-1}}$ は $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{n-1}$ から 0 である第 n 成分を除いてできる $(n-1)$ 次元列ベクトル．

$(\mathrm{V3})_n$ 任意の $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{R}$ に対し，

$$\mathrm{vol}_n P(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{n-1}, \boldsymbol{a}_n) = \mathrm{vol}_n P(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{n-1}, \alpha_1 \boldsymbol{a}_1 + \cdots + \alpha_{n-1}\boldsymbol{a}_{n-1} + \boldsymbol{a}_n).$$

このとき，$\mathrm{vol}_n P(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ を $P(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ の体積と定義する．

まず，$(\mathrm{V1})_3$，$(\mathrm{V2})_3$，$(\mathrm{V3})_3$ は 3 次元の時に書いた (V1)，(V2)，(V3) と全く同じであることに注意する．しかし，一般の n 次元の場合，そもそも "体積" とは何かということが不明なので，これは体積の性質を書き出したというよりも，「"平行体の体積" というものが定義できるのであれば満たしてほしい性質」を書き下したものと言える．つまり，この場合は「そもそもこんな vol_n という関数があるのか」「このような vol_n があったとすると 1 通りなのか」ということから非自明である．[*2]

まず，「このような vol_n があったとすると 1 通りなのか」という問については，実はこれは 3 次元の場合に書いた計算方法 i)，ii) と同様の手順を考えれば 1 通りであることがわかる．詳細は考えてみてほしい．

「そもそもこんな vol_n という関数があるのか」という問には行列式を用いて答えることができる．

定理．

任意の $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n \in \mathbb{R}^n$ に対し，

$$\mathrm{vol}_n P(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n) = |\det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)|$$

とすれば，vol_n は $(\mathrm{V1})_n$，$(\mathrm{V2})_n$，$(\mathrm{V3})_n$ を満たす．

定理の証明は 3 次元の場合に $\mathrm{vol}_3 P(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) = |\det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)|$ を証明した方法と全く同様であるので，詳細は再び省略する．

以上より，

n 次正方行列の行列式はその n 個の列ベクトルのなす平行体の符号付き体積

と考えることができる．よって，例えば n 次正方行列が正則であることと，n 個の列ベクトルのなす平行体が "潰れていない"(= 体積が 0 である) が同値であること等がわかる．

[*2] 本当は 2，3 次元でも "面積"，"体積" とは何かという問いは非自明だが，ここではその手の話には踏み込まない．実際 2，3 次元の場合でも "平行体の体積" とは $(\mathrm{V1})_n$，$(\mathrm{V2})_n$，$(\mathrm{V3})_n$ $(n = 2, 3)$ を満たす関数の値で定まるものと考えるのが厳密な方法の 1 つである．