線形代数 II 第 7 回レポート課題解答例

担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)*

問題 1

V と W を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とする ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$)．このとき，以下の問に答えよ．なお，証明問題においてはベクトル空間どの性質を用いたかを逐一記述し，厳密に解答を記述することが望ましい．

(1) 任意の 2 つの線形写像 $f\colon V\to W$，$g\colon V\to W$ に対し，写像 $h\colon V\to W,\ \boldsymbol{v}\mapsto f(\boldsymbol{v})+g(\boldsymbol{v})$ も線形写像となることを証明せよ． なお，この写像 h は $f+g$ と書かれる．

(2) 任意の $c\in\mathbb{K}$ と線形写像 $f\colon V\to W$ に対し，写像 $h'\colon V\to W, \boldsymbol{v}\mapsto cf(\boldsymbol{v})$ も線形写像となることを証明せよ．なお，この写像 h' は cf と書かれる．

(3) V から W への線形写像全体のなす集合を $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,W)$ と書く．このとき，線形写像の和とスカラー倍をそれぞれ上の (1)，(2) で定義することにより，$\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,W)$ は $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間となる．(このことは証明しなくて良い．) このとき，$\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,W)$ の零ベクトル $\mathbf{0}$，および，各元 $f\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,W)$ の逆元 $-f$ はそれぞれどのような線形写像 $V\to W$ となるか記述せよ．

問題 1 解答例． (解答内に現れる (v1)–(v8) については補足解説を参照のこと．なお，ベクトル空間の講義の初回のため，どの条件を使っているか明確にするために細かく条件の番号を書いて証明しているが，慣れてくればここまで書く必要は無く，これらの条件の番号を覚える必要も無い．)

(1) 任意の $\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}'\in V$ に対し，

$$\begin{aligned}
h(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}')&=f(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}')+g(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}')=(f(\boldsymbol{v})+f(\boldsymbol{v}'))+(g(\boldsymbol{v})+g(\boldsymbol{v}')) \quad (\text{線形写像の定義より})\\
&=f(\boldsymbol{v})+f(\boldsymbol{v}')+g(\boldsymbol{v})+g(\boldsymbol{v}') \quad ((\text{v2}) \text{ より和の順は任意で良い})\\
&=f(\boldsymbol{v})+g(\boldsymbol{v})+f(\boldsymbol{v}')+g(\boldsymbol{v}') \quad ((\text{v1}) \text{ より})\\
&=h(\boldsymbol{v})+h(\boldsymbol{v}'). \quad (h \text{ の定義より})
\end{aligned}$$

さらに，任意の $c\in\mathbb{K}$，$\boldsymbol{v}\in V$ に対し，

$$\begin{aligned}
h(c\boldsymbol{v})&=f(c\boldsymbol{v})+g(c\boldsymbol{v})=cf(\boldsymbol{v})+cg(\boldsymbol{v}) \quad (\text{線形写像の定義より})\\
&=c(f(\boldsymbol{v})+g(\boldsymbol{v})) \quad ((\text{v6}) \text{ より})\\
&=ch(\boldsymbol{v}). \quad (h \text{ の定義より})
\end{aligned}$$

以上より，h は線形写像である． □

(2) 任意の $\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}'\in V$ に対し，

$$\begin{aligned}
h'(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}')&=cf(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}')=c(f(\boldsymbol{v})+f(\boldsymbol{v}')) \quad (\text{線形写像の定義より})\\
&=cf(\boldsymbol{v})+cf(\boldsymbol{v}') \quad ((\text{v6}) \text{ より})\\
&=h'(\boldsymbol{v})+h'(\boldsymbol{v}'). \quad (h' \text{の定義より})
\end{aligned}$$

* *e-mail*：`hoya@shibaura-it.ac.jp`

さらに，任意の $c' \in \mathbb{K}$，$\boldsymbol{v} \in V$ に対し，

$$\begin{aligned} h'(c\boldsymbol{v}) &= cf(c'\boldsymbol{v}) = c(c'f(\boldsymbol{v})) \quad (\text{線形写像の定義より}) \\ &= (cc')f(\boldsymbol{v}) \quad ((\mathrm{v7})\ \text{より}) \\ &= c'(cf(\boldsymbol{v})) \quad ((\mathrm{v7})\ \text{より}) \\ &= ch'(\boldsymbol{v}). \quad (h\ \text{の定義より}) \end{aligned}$$

以上より，h' は線形写像である． □

(3)
- 零ベクトル $\boldsymbol{0}\colon V \to W$ は

$$\text{任意の } \boldsymbol{v} \in V \text{ に対し，} \boldsymbol{0}(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}_W\text{，(ただし，} \boldsymbol{0}_W \text{ は } W \text{ の零ベクトル)}$$

で定まる線形写像．

理由：このように $\boldsymbol{0}$ を定めると，任意の $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$，$\boldsymbol{v} \in V$ に対し，

$$(f + \boldsymbol{0})(\boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{v}) + \boldsymbol{0}(\boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{v}) + \boldsymbol{0}_W = f(\boldsymbol{v})$$

となる．よって，$\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ の元として，$f + \boldsymbol{0} = f$ が成立するので，$\boldsymbol{0}$ は零ベクトルの定義を満たす．

- $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ の逆元 $-f\colon V \to W$ は，

$$\text{任意の } \boldsymbol{v} \in V \text{ に対し，} (-f)(\boldsymbol{v}) = -f(\boldsymbol{v}),$$

で定まる線形写像．

理由：このように $-f$ を定めると，任意の $\boldsymbol{v} \in V$ に対し，

$$(f + (-f))(\boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{v}) + (-f)(\boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{v}) + (-f(\boldsymbol{v})) = \boldsymbol{0}_W$$

となる．よって，$\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ の元として，$f + (-f) = \boldsymbol{0}$ が成立するので，$-f$ は f の逆元の定義を満たす．

□

問題 1 補足解説． まず，ベクトル空間の定義を思い出しておこう：

定義． $(V, +, \cdot\,)$ が $\mathbb{K}$ **上のベクトル空間**であるとは，これが以下のような 3 つ組であることである：

- V は空でない集合，
- $+$ は写像 $+\colon V \times V \to V,\ (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \mapsto \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$,
- $\cdot$ は写像 $\cdot\colon \mathbb{K} \times V \to V,\ (c, \boldsymbol{v}) \mapsto c\boldsymbol{v}$

であって，以下が成立する：

(v1) 任意の $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ に対し，$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$,
(v2) 任意の $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$ に対し，$(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w})$,
(v3) ある元 $\boldsymbol{0} \in V$ が存在して，任意の $\boldsymbol{u} \in V$ に対し，$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{u}$，(この $\boldsymbol{0}$ を**零ベクトル**という)
(v4) 任意の $\boldsymbol{v} \in V$ に対して，ある元 $-\boldsymbol{v} \in V$ が存在して，$\boldsymbol{v} + (-\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}$，(この $-\boldsymbol{v}$ を $\boldsymbol{v}$ の**逆元**という)
(v5) 任意の $c, d \in \mathbb{K}, \boldsymbol{v} \in V$ に対し，$(c + d)\boldsymbol{v} = c\boldsymbol{v} + d\boldsymbol{v}$,
(v6) 任意の $c \in \mathbb{K}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ に対し，$c(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = c\boldsymbol{u} + c\boldsymbol{v}$,
(v7) 任意の $c, d \in \mathbb{K}, \boldsymbol{v} \in V$ に対し，$(cd)\boldsymbol{v} = c(d\boldsymbol{v})$,
(v8) 任意の $\boldsymbol{v} \in V$ に対し，$1\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$.

注意．以下では，見やすさのため $(V, +, \cdot\,)$ を単に V と書くことが多い．

まず (v1) より，一般に $\mathbf{0}+\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}$，$(-\boldsymbol{v})+\boldsymbol{v}=\mathbf{0}$ も成立することに注意する．

また，ベクトル空間の条件 (v2) は，“和を取る順番を変えても結果が変わらない” ということを意味する．このため，和をとるときに 2 つづつまとめて括弧を書く必要もないことがわかる．例えば，(1) で $(f(\boldsymbol{v})+f(\boldsymbol{v}'))+(g(\boldsymbol{v})+g(\boldsymbol{v}'))$ を $(f(\boldsymbol{v})+g(\boldsymbol{v}))+(f(\boldsymbol{v}')+g(\boldsymbol{v}'))$ に変えた過程はより細かく書くと以下のようにできることがわかる (ここまで書く必要はない)：

$$\begin{aligned}(f(\boldsymbol{v})+f(\boldsymbol{v}'))+(g(\boldsymbol{v})+g(\boldsymbol{v}')) &= f(\boldsymbol{v})+(f(\boldsymbol{v}')+(g(\boldsymbol{v})+g(\boldsymbol{v}'))) \quad ((\text{v2}) \text{ より}) \\ &= f(\boldsymbol{v})+((f(\boldsymbol{v}')+g(\boldsymbol{v}))+g(\boldsymbol{v}')) \quad ((\text{v2}) \text{ より}) \\ &= f(\boldsymbol{v})+((g(\boldsymbol{v})+f(\boldsymbol{v}'))+g(\boldsymbol{v}')) \quad ((\text{v1}) \text{ より}) \\ &= f(\boldsymbol{v})+(g(\boldsymbol{v})+(f(\boldsymbol{v}')+g(\boldsymbol{v}'))) \quad ((\text{v2}) \text{ より}) \\ &= (f(\boldsymbol{v})+g(\boldsymbol{v}))+(f(\boldsymbol{v}')+g(\boldsymbol{v}')). \quad ((\text{v2}) \text{ より})\end{aligned}$$

以下の命題は (3) で考えたように零ベクトル，逆元を求めるときに便利であるので頭に入れておくと良い．

命題.

V を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とする．このとき以下が成立する．

(1) 零ベクトル $\mathbf{0}$ はただ 1 つに定まる．
(2) 任意の $\boldsymbol{v}\in V$ に対し，その逆元 $-\boldsymbol{v}$ はただ 1 つに定まる．
(3) 任意の $\boldsymbol{v}\in V$ に対し，$\mathbf{0}=0\boldsymbol{v}$．
(4) 任意の $\boldsymbol{v}\in V$ に対し，$-\boldsymbol{v}=(-1)\boldsymbol{v}$．

証明.

(1) $\mathbf{0}'$ も V の零ベクトルであるとすると，(v3) より $\mathbf{0}'=\mathbf{0}'+\mathbf{0}=\mathbf{0}$ となり，結局 $\mathbf{0}$ に一致する．よって，V の零ベクトルはただ 1 つである． □

(2) $\boldsymbol{v}'$ も $\boldsymbol{v}$ の逆元であるとすると，(v1)，(v2)，(v3) より $\boldsymbol{v}'=\boldsymbol{v}'+\mathbf{0}=\boldsymbol{v}'+(\boldsymbol{v}+(-\boldsymbol{v}))=(\boldsymbol{v}'+\boldsymbol{v})+(-\boldsymbol{v})=\mathbf{0}+(-\boldsymbol{v})=-\boldsymbol{v}$ となり，結局 $-\boldsymbol{v}$ に一致する．よって，$\boldsymbol{v}$ の逆元はただ 1 つである． □

(3) (v5) より，$0\boldsymbol{v}=(0+0)\boldsymbol{v}=0\boldsymbol{v}+0\boldsymbol{v}$．よって，両辺に $-0\boldsymbol{v}$ を加えて，$\mathbf{0}=0\boldsymbol{v}+\mathbf{0}=0\boldsymbol{v}$． □

(4) (v5)，(v8) と (1) より，$\mathbf{0}=0\boldsymbol{v}=(1+(-1))\boldsymbol{v}=1\boldsymbol{v}+(-1)\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}+(-1)\boldsymbol{v}$．よって，両辺に $-\boldsymbol{v}$ を加えて，$-\boldsymbol{v}=\mathbf{0}+(-1)\boldsymbol{v}=(-1)\boldsymbol{v}$． □

本問を解くためには以下の線形写像の定義も思い出しておく必要がある：

定義. V,W を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とする． 写像 $f\colon V\to W$ が**線形写像**であるとは，

(i) 任意の $\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}'\in V$ に対し，$f(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}')=f(\boldsymbol{v})+f(\boldsymbol{v}')$,
(ii) 任意の $c\in\mathbb{K},\boldsymbol{v}\in V$ に対し，$f(c\boldsymbol{v})=cf(\boldsymbol{v})$,

を満たすことである．

□

問題 2

$\mathbb{C}$ 係数 1 変数多項式全体の集合を $\mathbb{C}[x]$ と書く．つまり，

$$\mathbb{C}[x]:=\{a_0+a_1x+\cdots a_nx^n \mid n\in\mathbb{Z}_{\geq 0},\ a_i\in\mathbb{C}\ (i=1,\dots,n)\}$$

とする．ここで，$\mathbb{C}[x]$ を通常の多項式の和とスカラー倍により，$\mathbb{C}$ 上のベクトル空間とみなす．このとき，$\mathbb{C}[x]$ の以下の部分集合がそれぞれ $\mathbb{C}[x]$ の部分空間であるかどうかを判定し，その理由を述べよ．

(1) $V_1:=\{a+bx \mid a,b\in\mathbb{C}\}$.
(2) $V_2:=\{a+bx+cx^2 \mid a,b,c\in\mathbb{R}\}$.
(3) $V_3:=\{f(x)\in\mathbb{C}[x] \mid x^2f''(x)=6f(x)\}$.
(4) $V_4:=\{f(x)\in\mathbb{C}[x] \mid f(0)f(1)=0\}$.

問題 2 解答例.

(1) V_1 は $\mathbb{C}[x]$ の部分空間である．

理由：まず，$0 \in V_1$ である．

また，任意の 2 元 $a_1 + b_1 x, a_2 + b_2 x \in V_1$ に対し，$(a_1 + b_1 x) + (a_2 + b_2 x) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)x \in V_1$ である．

さらに，任意の $c \in \mathbb{C}$，$a + bx \in V_1$ に対し，$c(a + bx) = ca + cbx \in V_1$ である．

以上より，V_1 は $\mathbb{C}[x]$ の部分空間である． □

(2) V_2 は $\mathbb{C}[x]$ の部分空間ではない．

理由：$x \in V_2$ であるが，$\sqrt{-1} \notin \mathbb{R}$ であるので，$\sqrt{-1}x \notin V_2$ である．いま $\mathbb{C}[x]$ は $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間であるとみなしているので，V_2 は $\mathbb{C}[x]$ の部分空間ではない． □

(3) V_3 は $\mathbb{C}[x]$ の部分空間である．

理由：まず，$f(x) := 0 \in \mathbb{C}[x]$ とすると，$f(x)$ は $x^2 f''(x) = 0 = 6f(x)$ を満たすので，$0 \in V_3$ である．

また，$f_1(x), f_2(x)$ を任意の V_3 の 2 元とすると，

$$x^2 f_1''(x) = 6f_1(x) \qquad x^2 f_2''(x) = 6f_2(x)$$

となるので，

$$x^2(f_1(x) + f_2(x))'' = x^2(f_1''(x) + f_2''(x)) = x^2 f_1''(x) + x^2 f_2''(x) = 6f_1(x) + 6f_2(x) = 6(f_1(x) + f_2(x)).$$

よって，$f_1(x) + f_2(x) \in V_3$.

さらに，任意の $c \in \mathbb{C}$，$g(x) \in V_3$ に対し，

$$x^2(cg(x))'' = c \cdot x^2 g''(x) = c \cdot 6g(x) = 6(cg(x)).$$

よって，$cg(x) \in V_3$．以上より，V_3 は $\mathbb{C}[x]$ の部分空間となる． □

(4) V_4 は $\mathbb{C}[x]$ の部分空間ではない．

理由：$x, x-1 \in V_4$ であるが，$f(x) := x + (x-1) = 2x - 1$ とすると，$f(0)f(1) = (-1) \cdot 1 = -1 \neq 0$ より，$f(x) \notin V_4$ である．よって，V_4 は $\mathbb{C}[x]$ の部分空間ではない． □

問題 2 補足解説. 以下が部分空間の定義であるので，部分空間かどうかを判定するためには以下の定義を満たしているかどうかを確認すれば良い：

> V を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とする．このとき，V の部分集合 W が V の**部分空間**であるとは，
>
> (i) $\mathbf{0} \in W$，($\mathbf{0}$ は V の零ベクトル)
>
> (ii) 任意の $\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}' \in W$ に対し，$\boldsymbol{w} + \boldsymbol{w}' \in W$，($W$ は**和で閉じている**という)
>
> (iii) 任意の $c \in \mathbb{K}$，$\boldsymbol{w} \in W$ に対し，$c\boldsymbol{w} \in W$，(W は**スカラー倍で閉じている**という)
>
> が満たされることを言う．

(2) は和では閉じているがスカラー倍で閉じておらず ($\mathbb{C}$ 上で考えていることに注意)，(4) はスカラー倍で閉じているが和では閉じていないため，それぞれ部分空間とならない．

ちなみに，V_3 の空間は具体的に表示すると，$V_3 = \{ax^3 \mid a \in \mathbb{C}\}$ となる．また，V_4 は

$$V_4 = \{f(x) \mid f(0) = 0,\ \text{または},\ f(1) = 0\} = \{f(x) \mid f(0) = 0\} \cup \{f(x) \mid f(1) = 0\}$$

と書くこともできる．このとき，実は $\{f(x) \mid f(0) = 0\}$，$\{f(x) \mid f(1) = 0\}$ はそれぞれ部分空間となる．(確認してみよ．) 部分空間の和集合は一般には部分空間にはならないのである．ただしベクトル空間 V の部分空間 W，W' の共通部分 $W \cap W'$ は再び V の部分空間となる．これも証明は容易なので確かめてほしい． □