線形代数 II 第 8 回レポート課題解答例

担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)*

問題 1

2 次以下の $\mathbb{C}$ 係数 1 変数多項式全体の集合を $\mathbb{C}[x]_{\leq 2}$ と書く．つまり，

$$\mathbb{C}[x]_{\leq 2} := \{ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbb{C}\}$$

とする．これを通常の多項式の和とスカラー倍により，$\mathbb{C}$ 上のベクトル空間とみなす．このとき，以下の $\mathbb{C}[x]_{\leq 2}$ の部分集合がそれぞれ $\mathbb{C}[x]_{\leq 2}$ の基底であるかどうかを判定し，その理由を説明せよ．

(1) $B_1 := \{2x^2 + 2x - 3, -x^2 + x, -x^2 + x - 1\}$.
(2) $B_2 := \{x^2 - 1, 2x^2 + 2x - 2, -x\}$.
(3) $B_3 := \{2x^2 + 3x, -x^2 + x\}$.

問題 1 解答例.

(1) B_1 は $\mathbb{C}[x]_{\leq 2}$ の基底である．

理由：まず，任意の $a, b, c \in \mathbb{C}$ に対し，ある $d_1, d_2, d_3 \in \mathbb{C}$ が存在して，

$$d_1(2x^2 + 2x - 3) + d_2(-x^2 + x) + d_3(-x^2 + x - 1) = ax^2 + bx + c \tag{$*$}$$

となることを示す．いま，

$$(*) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2d_1 - d_2 - d_3 = a \\ 2d_1 + d_2 + d_3 = b \\ -3d_1 - d_3 = c \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

となるので，d_1, d_2, d_3 に関する最後の連立一次方程式が解を持つことを示せばよい．ここで，

$$\left| \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right| = -4 \neq 0$$

より，この連立一次方程式は係数行列が正則なので，唯一つの解

$$\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

を持つ．よって，B_1 はベクトル空間として $\mathbb{C}[x]_{\leq 2}$ を生成する．

次に，ある $d_1, d_2, d_3 \in \mathbb{C}$ に対して，

$$d_1(2x^2 + 2x - 3) + d_2(-x^2 + x) + d_3(-x^2 + x - 1) = 0 \tag{$**$}$$

であったとすると，$(**)$ は $(*)$ で $a = b = c = 0$ としたものなので，再び上の計算から，

$$(**) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad d_1 = d_2 = d_3 = 0$$

となる．よって，B_1 は一次独立な集合である．以上より，B_1 は $\mathbb{C}[x]_{\leq 2}$ の基底である． □

* e-mail：hoya@shibaura-it.ac.jp

(2) B_2 は $\mathbb{C}[x]_{\leq 2}$ の基底ではない．
理由：ある $d_1, d_2, d_3 \in \mathbb{C}$ が存在して，

$$d_1(x^2-1) + d_2(2x^2+2x-2) + d_3(-x) = 0 \tag{$***$}$$

であったとすると，

$$(***) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} d_1 + 2d_2 = 0 \\ 2d_2 - d_3 = 0 \\ -d_1 - 2d_2 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} d_1 + 2d_2 = 0 \\ 2d_2 - d_3 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} d_1 = -2d_2 \\ d_3 = 2d_2 \end{cases}$$

となるので，例えば $d_1 = -2, d_2 = 1, d_3 = 2$ とすると，$(***)$ が成立する．よって，B_2 は一次従属な集合なので，$\mathbb{C}[x]_{\leq 2}$ の基底ではない． □

(3) B_3 は $\mathbb{C}[x]_{\leq 2}$ の基底ではない．
理由：$2x^2+3x$ と $-x^2+x$ は共に定数項が 0 なので，その一次結合で表される多項式の定数項は 0 である．しかし，$\mathbb{C}[x]_{\leq 2}$ は定数項が 0 でない多項式を含むので，B_3 は $\mathbb{C}[x]_{\leq 2}$ をベクトル空間として生成しない．よって，B_3 は $\mathbb{C}[x]_{\leq 2}$ の基底ではない． □

問題 1 補足解説． 基底の定義は以下であったので，本問は与えられた集合が条件 (i)，(ii) を共に満たすかどうかを調べる問題である．

定義． $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$ とし，V を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とする．V の部分集合 B が以下を満たすとき B を V の**基底**という：

(i) V の任意の元が B の元の一次結合で書ける．つまり，任意の $\boldsymbol{v} \in V$ に対し，ある $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{K}$ と $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n \in B$ が存在して，$c_1\boldsymbol{b}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{b}_n = \boldsymbol{v}$ となる．（このとき，部分集合 B は V を**ベクトル空間として生成する**という．）

(ii) B は一次独立な集合である．

B_2 は条件 (i)，(ii) を共に満たさない集合 (例えば 1 は B_2 の元の一次結合では作れない) である．B_3 は条件 (ii) を満たすが，(i) を満たさない集合である． □

問題 2

V と W を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とし，$f \colon V \to W$ を線形写像とする ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$)．このとき，以下を証明せよ．

(1) $\mathrm{Ker}\, f$ は V の部分空間である．
(2) $\mathrm{Im}\, f$ は W の部分空間である．

問題 2 解答例． V, W の零ベクトルをそれぞれ $\mathbf{0}_V, \mathbf{0}_W$ と書く．

(1) 線形写像 f は $f(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$ を満たすので，$\mathbf{0}_V \in \mathrm{Ker}\, f$ である．
　また，任意の 2 元 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in \mathrm{Ker}\, f$ に対し，核の定義より，

$$f(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) = f(\boldsymbol{v}_1) + f(\boldsymbol{v}_2) = \mathbf{0}_W + \mathbf{0}_W = \mathbf{0}_W$$

より，$\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 \in \mathrm{Ker}\, f$ である．
　さらに，任意の $c \in \mathbb{K}$，$\boldsymbol{v} \in \mathrm{Ker}\, f$ に対し，核の定義より，

$$f(c\boldsymbol{v}) = cf(\boldsymbol{v}) = c\mathbf{0}_W = \mathbf{0}_W$$

より，$c\boldsymbol{v} \in \mathrm{Ker}\, f$ である．以上より，$\mathrm{Ker}\, f$ は V の部分空間である． □

(2) 線形写像 f は $f(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$ を満たすので，$\mathbf{0}_W \in \mathrm{Im}\, f$ である．

また, 任意の 2 元 $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2 \in \mathrm{Im}\, f$ をとると, 像の定義より, ある $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in V$ が存在して, $f(\boldsymbol{v}_1) = \boldsymbol{w}_1, f(\boldsymbol{v}_2) = \boldsymbol{w}_2$ となる．このとき,

$$\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2 = f(\boldsymbol{v}_1) + f(\boldsymbol{v}_2) = f(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) \in \mathrm{Im}\, f$$

である．

さらに，任意の $\boldsymbol{w} \in \mathrm{Ker}\, f$ に対し，像の定義より，ある $\boldsymbol{v} \in \mathrm{Im}\, f$ が存在して $f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{w}$ となる．よって，任意の $c \in \mathbb{K}$ に対し，

$$c\boldsymbol{w} = cf(\boldsymbol{v}) = f(c\boldsymbol{v}) \in \mathrm{Im}\, f$$

である．以上より，$\mathrm{Im}\, f$ は W の部分空間である． □

問題 2 補足解説. 部分空間の定義については第 7 回レポート課題解答例問題 2 補足解説を参照のこと．線形写像 f の像 $\mathrm{Im}\, f$ と核 $\mathrm{Ker}\, f$ の定義は以下である:

> **定義.** V と W を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とし，$f\colon V \to W$ を線形写像とする．W の零ベクトルを $\mathbf{0}_W$ と書く．このとき，f の**像** (image)$\mathrm{Im}\, f$ と**核** (kernel)$\mathrm{Ker}\, f$ は以下で定義される：
>
> $$\begin{aligned}\mathrm{Im}\, f &= \{f(\boldsymbol{v}) \in W \mid \boldsymbol{v} \in V\} = \{\boldsymbol{w} \in W \mid \text{ある } \boldsymbol{v} \in V \text{ が存在して，} \boldsymbol{w} = f(\boldsymbol{v})\},\\ \ker f &= \{\boldsymbol{v} \in V \mid f(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}_W\}\end{aligned}$$

本問で証明した事実は重要である．証明には線形写像の定義の性質が本質的に用いられている．(線形写像については第 7 回レポート課題解答例問題 1 補足解説を参照のこと．)$\mathrm{Im}\, f$ は$\underline{W\text{ の}}$部分空間であり，$\mathrm{Ker}\, f$ は $\underline{V\text{ の}}$部分空間であることに注意する． □