線形代数 II 第 9 回レポート課題解答例

担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)*

問題 1

$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 4 & -5 & 4 \\ -3 & -3 & -2 \end{pmatrix}$ とし，線形写像 $f_A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \mapsto A \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ を考える．

(1) f_A の定義域の基底を $B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$，終域の基底を $B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ としたとき，基底 B_1, B_2 に関する f_A の表現行列を求めよ．

(2) f_A の定義域，終域の基底を共に $B = \left\{ \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ としたとき，基底 B に関する f_A の表現行列を求めよ．

問題 1 解答例．

(1)

$$
\begin{aligned}
f_A\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) &= A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 7 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \\
f_A\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) &= A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \\
f_A\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) &= A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 6 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

より，基底 B_1, B_2 に関する f_A の表現行列は $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 7 & -2 & 6 \\ -3 & -3 & -2 \end{pmatrix}$．　□

(2)

$$
\begin{aligned}
f_A\left(\begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}\right) &= A \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -8 \\ -14 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \\
f_A\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right) &= A \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \\
f_A\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) &= A \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

* *e-mail*：hoya@shibaura-it.ac.jp

より，基底 B に関する f_A の表現行列は $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. □

問題 1 補足解説. まず，表現行列の定義を思い出そう：

> **定義.** $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$ とする．V, W を $\mathbb{K}$ 上の $\{\mathbf{0}\}$ でない有限次元ベクトル空間とし，$f\colon V \to W$ を線形写像とする．ここで，V, W の基底を固定し，それぞれ $B_1 = \{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n\}, B_2 = \{\boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_m\}$ とする．このとき，
>
> $$f(\boldsymbol{v}_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\boldsymbol{w}_i, \quad j = 1, \dots, n \tag{$*$}$$
>
> によって定まる $a_{ij} \in \mathbb{K}$ を並べて作った $m \times n$ 行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ を基底 B_1, B_2 に関する f の表現行列という．

この定義より，基底 B_1, B_2 に関する線形写像 f の表現行列を求めるためには，

(Step1) 定義域の基底 B_1 の元を順に f で送り，
(Step2) それを終域の基底 B_2 の一次結合で表示し，
(Step3) Step2 の一次結合の展開に出てきた係数を順に 1列づつ並べてゆけば良い．

ここで，1 列づつ並べるのか 1 行づつ並べてゆくのかということは混乱するポイントであるが，

> A を $m \times n$ 行列としたとき，線形写像 $f_A\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m, \boldsymbol{v} \mapsto A\boldsymbol{v}$ の標準基底に関する表現行列は A

という事実を覚えておけば，覚えられるであろう．ここで，標準基底とは i 番目の成分が 1 その他の成分が 0 という縦ベクトルを i が 1 から順に並べてできる $\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m$ の基底である．

また，$f_A\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m, \boldsymbol{v} \mapsto A\boldsymbol{v}$ という形の線形写像に関しては，以下のように計算をすることも可能である．

> **命題**
>
> A を $m \times n$ 行列とし，$B_1 = \{\boldsymbol{p}_1, \dots, \boldsymbol{p}_n\}$ を $\mathbb{K}^n$ の基底，$B_2 = \{\boldsymbol{q}_1, \dots, \boldsymbol{q}_m\}$ を $\mathbb{K}^m$ の基底とする．このとき，基底 B_1, B_2 に関する線形写像 $f_A\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m, \boldsymbol{v} \mapsto A\boldsymbol{v}$ の表現行列は
>
> $$Q^{-1}AP$$
>
> で与えられる．ただし，$P := (\boldsymbol{p}_1 \cdots \boldsymbol{p}_n), Q := (\boldsymbol{q}_1 \cdots \boldsymbol{q}_m)$ とする．(B_1, B_2 が基底であることより，$P.Q$ は正則行列となることに注意する．)

証明. 各 $j = 1, \dots, n$，$k = 1, \dots, m$ に対し，

$$\boldsymbol{p}_j = \begin{pmatrix} p_{1j} \\ \vdots \\ p_{nj} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n, \qquad \boldsymbol{e}_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} < j \in \mathbb{K}^n, \qquad \boldsymbol{f}_k = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} < k \in \mathbb{K}^m,$$

とする．このとき，

$$(\boldsymbol{f}_1 \cdots \boldsymbol{f}_m) = I_m = QQ^{-1} = (\boldsymbol{q}_1 \cdots \boldsymbol{q}_m)Q^{-1}$$

となることに注意する．さらに，

$$f_A(\boldsymbol{p}_j) = f_A(\sum_{i=1}^{n} p_{ij}\boldsymbol{e}_i) = \sum_{i=1}^{n} p_{ij} f_A(\boldsymbol{e}_i)$$

なので，以上を合わせると

$$\begin{aligned}(f_A(\boldsymbol{p}_1)\cdots f_A(\boldsymbol{p}_n)) &= (f_A(\boldsymbol{e}_1)\cdots f_A(\boldsymbol{e}_n))P \\ &= (A\boldsymbol{e}_1\cdots A\boldsymbol{e}_n)P = AP \\ &= I_mAP = (\boldsymbol{f}_1\cdots \boldsymbol{f}_m)AP = (\boldsymbol{q}_1\cdots \boldsymbol{q}_m)Q^{-1}AP.\end{aligned}$$

となる．ここで，$Q^{-1}AP = (a'_{ij})_{i=1,\dots,m,j=1,\dots,n}$ とすると，これは

$$f_A(\boldsymbol{p}_j) = \sum_{i=1}^{m} a'_{ij}\boldsymbol{q}_i, \quad j = 1,\dots,n$$

を意味するので，表現行列の定義 (式 $(*)$) から，基底 B_1, B_2 に関する f_A の表現行列は $Q^{-1}AP$ である． □

問題 1 の場合に命題を確かめてみると，確かに

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}5&0&4\\4&-5&4\\-3&-3&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5&0&4\\4&-5&4\\-3&-3&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}1&5&0\\7&-2&6\\-3&-3&2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}-4&-2&-1\\4&1&0\\7&3&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}5&0&4\\4&-5&4\\-3&-3&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4&-2&-1\\4&1&0\\7&3&1\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}-1&1&-1\\4&-3&4\\-5&2&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5&0&4\\4&-5&4\\-3&-3&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4&-2&-1\\4&1&0\\7&3&1\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}-2&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

である．次回の内容であるが，n 次正方行列 A に対し，ある n 次正則行列 P が存在して，$P^{-1}AP$ が対角行列となるとき，**A は P により対角化可能**であるという．上の計算から問題 1(2) の基底を並べてできる行列は問題 1 の A を対角化する行列となっている．対角化の問題は，表現行列が対角行列となるようなベクトル空間の基底を探す問題とも言えるのである． □

問題 2

$\mathbb{R}$ 上のベクトル空間 $\mathbb{R}^5$ の部分集合

$$B := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

は $\mathbb{R}^5$ の基底をなすかどうかを判定し，その理由を答えよ．

問題 2 解答例． B の各元を各列ベクトルに持つ次の行列を考える．

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

この行列の行列式が 0 であるか否かが B が $\mathbb{R}^5$ の基底であるか否かに対応するが，いま，

$$\left| \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \right| = 101 \neq 0$$

より，B は $\mathbb{R}^5$ の基底である． □

問題 2 補足解説． $\mathbb{K}^n$ の形のベクトル空間 (このようなベクトル空間を**数ベクトル空間**と呼ぶ) においては与えられた元の組が基底をなすかどうかを計算で簡単に判定する以下の命題があった．この事実は本質的には “標準基底” の存在に由来していると言える．

命題

$\mathbb{K}^n$ の n 本のベクトルからなる集合 $\{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n\}$ に対し，

$$\begin{aligned} \{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n\} \text{ が基底をなす} \quad &\Leftrightarrow \quad |(\boldsymbol{a}_1 \cdots \boldsymbol{a}_n)| \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \operatorname{rank}(\boldsymbol{a}_1 \cdots \boldsymbol{a}_n) = n \end{aligned}$$

本問ではこの判定方法 ($|(\boldsymbol{a}_1 \cdots \boldsymbol{a}_n)| \neq 0$ の方) を用いて基底であるかどうかの判定を行った．行列式の計算に関しては各自好きな方法で計算してもらえれば良い．

講義内では $|(\boldsymbol{a}_1 \cdots \boldsymbol{a}_n)| \neq 0$ の方を紹介したので解答例でもその解法にしたが，実際には $\operatorname{rank}(\boldsymbol{a}_1 \cdots \boldsymbol{a}_n) = n$ を判定する方が計算ミスを防げる可能性が高いかもしれない．例えば，上の問題の場合には，

$$\operatorname{rank} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 5$$

を示せばよい．行列の形を見て臨機応変に対応すること． □