線形代数 II 第 10 回レポート課題解答例

担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)*

問題 1

以下の行列がそれぞれ対角化可能かどうかを判定し，対角化可能な場合にはその結果得られる対角行列を求めよ．さらに，対角化可能な場合は対角化に用いられる正則行列も明示せよ．

$$(1)\ \begin{pmatrix}3 & -8 & 6\\ 0 & -1 & 3\\ 4 & -8 & 2\end{pmatrix}\quad (2)\ \begin{pmatrix}5 & 2 & 4\\ -4 & -1 & -4\\ -4 & -2 & -3\end{pmatrix}\quad (3)\ \begin{pmatrix}4 & 4 & -3\\ 3 & -1 & -9\\ 5 & 3 & -7\end{pmatrix}\quad (4)\ \begin{pmatrix}7 & 1 & -6 & 6\\ -6 & -4 & 0 & 0\\ -2 & -6 & -3 & 6\\ -6 & -8 & -2 & 5\end{pmatrix}$$

問題 1 解答例.

(1) $A_1 := \begin{pmatrix}3 & -8 & 6\\ 0 & -1 & 3\\ 4 & -8 & 2\end{pmatrix}$ の固有多項式は，

$$\begin{aligned}\Phi_{A_1}(\lambda) &= \left|\begin{pmatrix}\lambda-3 & 8 & -6\\ 0 & \lambda+1 & -3\\ -4 & 8 & \lambda-2\end{pmatrix}\right|\\ &= (\lambda-3)(\lambda+1)(\lambda-2)+96+0-(-24)(\lambda-3)-0-24(\lambda+1) = (\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda-3)\end{aligned}$$

となるので，A_1 の固有値は $\lambda=-1,2,3$ である．固有値が全て異なるので A_1 は対角化可能で，対角化の結果得られる対角行列は，

$$\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}.$$

$\lambda=-1$ に対する固有ベクトルを求める．x_1,x_2,x_3 に関する連立一次方程式

$$(-I_3-A_1)\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4 & 8 & -6\\ 0 & 0 & -3\\ -4 & 8 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

を解くと，

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix} = c\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 0\end{pmatrix}\qquad (c\text{ は任意定数})$$

となるので，$\lambda=-1$ に対する固有ベクトルの 1 つは，$\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$ と取れる．

$\lambda=2$ に対する固有ベクトルを求める．x_1,x_2,x_3 に関する連立一次方程式

$$(2I_3-A_1)\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 8 & -6\\ 0 & 3 & -3\\ -4 & 8 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

* *e-mail*：hoya@shibaura-it.ac.jp

を解くと，

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (c \text{ は任意定数})$$

となるので，$\lambda = 2$ に対する固有ベクトルの 1 つは，$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ と取れる．

$\lambda = 3$ に対する固有ベクトルを求める．x_1, x_2, x_3 に関する連立一次方程式

$$(3I_3 - A_1) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 8 & -6 \\ 0 & 4 & -3 \\ -4 & 8 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を解くと，

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad (c \text{ は任意定数})$$

となるので，$\lambda = 3$ に対する固有ベクトルの 1 つは，$\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ と取れる．以上より，

$$P_1 := \begin{pmatrix} 2 & 2 & 7 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

とすると，P_1 は正則で $P_1^{-1} A_1 P_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ となる． □

(2) $A_2 := \begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \\ -4 & -1 & -4 \\ -4 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ の固有多項式は，

$$\begin{aligned} \Phi_{A_2}(\lambda) &= \left| \begin{pmatrix} \lambda - 5 & -2 & -4 \\ 4 & \lambda + 1 & 4 \\ 4 & 2 & \lambda + 3 \end{pmatrix} \right| \\ &= (\lambda - 5)(\lambda + 1)(\lambda + 3) + (-32) + (-32) - 8(\lambda - 5) - (-8)(\lambda + 3) - (-16)(\lambda + 1) \\ &= (\lambda + 1)(\lambda - 1)^2 \end{aligned}$$

となるので，A_1 の固有値は $\lambda = -1, 1$(重複度 2) である．

$\lambda = -1$ に対する固有ベクトルを求める．x_1, x_2, x_3 に関する連立一次方程式

$$(-I_3 - A_2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -2 & -4 \\ 4 & 0 & 4 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を解くと，

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (c \text{ は任意定数})$$

となるので，$\lambda = -1$ に対する固有ベクトルの 1 つは，$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ と取れる．

$\lambda = 1$ に対する固有ベクトルを求める．x_1, x_2, x_3 に関する連立一次方程式

$$(I_3 - A_2)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -2 & -4 \\ 4 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を解くと，

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (c_1, c_2 \text{は任意定数})$$

となるので，$\lambda = 1$ に対する一次独立な固有ベクトルの組として，$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ が取れる．これより A_2 は対角化可能で，対角化の結果得られる対角行列は，

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

また，

$$P_2 := \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とすると，P_2 は正則で $P_2^{-1}A_2P_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ となる． □

(3) $A_3 := \begin{pmatrix} 4 & 4 & -3 \\ 3 & -1 & -9 \\ 5 & 3 & -7 \end{pmatrix}$ の固有多項式は，

$$\begin{aligned}\Phi_{A_3}(\lambda) &= \left|\begin{pmatrix} \lambda - 4 & -4 & 3 \\ -3 & \lambda + 1 & 9 \\ -5 & -3 & \lambda + 7 \end{pmatrix}\right| \\ &= (\lambda - 4)(\lambda + 1)(\lambda + 7) + 180 + 27 - (-27)(\lambda - 4) - 12(\lambda + 7) - (-15)(\lambda + 1) \\ &= (\lambda + 1)^2(\lambda + 2)\end{aligned}$$

となるので，A_3 の固有値は $\lambda = -1$(重複度 2), -2 である．

$\lambda = -1$ に対する固有ベクトルを考える．x_1, x_2, x_3 に関する連立一次方程式

$$(-I_3 - A_3)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -4 & 3 \\ -3 & 0 & 9 \\ -5 & -3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を解くと，

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (c \text{ は任意定数})$$

となるので，固有値 -1 に対する 2 本の一次独立な固有ベクトルは存在しない．一方，固有値 -1 の重複度は 2 であったので，A_3 は対角化不可能である． □

$\underline{(4)}$ $A_4 := \begin{pmatrix} 7 & 1 & -6 & 6 \\ -6 & -4 & 0 & 0 \\ -2 & -6 & -3 & 6 \\ -6 & -8 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ の固有多項式は，

$$\begin{aligned}
\Phi_{A_4}(\lambda) &= \left| \begin{pmatrix} \lambda-7 & -1 & 6 & -6 \\ 6 & \lambda+4 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & \lambda+3 & -6 \\ 6 & 8 & 2 & \lambda-5 \end{pmatrix} \right| \\
&= -6 \left| \begin{pmatrix} -1 & 6 & -6 \\ 6 & \lambda+3 & -6 \\ 8 & 2 & \lambda-5 \end{pmatrix} \right| + (\lambda+4) \left| \begin{pmatrix} \lambda-7 & 6 & -6 \\ 2 & \lambda+3 & -6 \\ 6 & 2 & \lambda-5 \end{pmatrix} \right| \\
&= -6\{-(\lambda+3)(\lambda-5) + (-288) + (-72) - 12 - 36(\lambda-5) - (-48)(\lambda+3)\} \\
&\quad + (\lambda+4)\{(\lambda-7)(\lambda+3)(\lambda-5) + (-216) + (-24) - (-12)(\lambda-7) - 12(\lambda-5) - (-36)(\lambda+3)\} \\
&= \lambda^4 - 5\lambda^3 + 5\lambda^2 + 5\lambda - 6 = (\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)
\end{aligned}$$

となるので，A_4 の固有値は $\lambda = -1, 1, 2, 3$ である．固有値が全て異なるので A_4 は対角化可能で，対角化の結果得られる対角行列は，

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

$\lambda = -1$ に対する固有ベクトルを求める．x_1, x_2, x_3, x_4 に関する連立一次方程式

$$(-I_4 - A_4) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & -1 & 6 & -6 \\ 6 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 2 & -6 \\ 6 & 8 & 2 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を解くと，

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (c \text{ は任意定数})$$

となるので，$\lambda = -1$ に対する固有ベクトルの 1 つは，$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ と取れる．

$\lambda = 1$ に対する固有ベクトルを求める．x_1, x_2, x_3, x_4 に関する連立一次方程式

$$(I_4 - A_4) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -1 & 6 & -6 \\ 6 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 4 & -6 \\ 6 & 8 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を解くと，

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \quad (c \text{ は任意定数})$$

となるので，$\lambda = -1$ に対する固有ベクトルの 1 つは，$\begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ と取れる．

$\lambda = 2$ に対する固有ベクトルを求める．x_1, x_2, x_3, x_4 に関する連立一次方程式

$$(2I_4 - A_4)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -1 & 6 & -6 \\ 6 & 6 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 5 & -6 \\ 6 & 8 & 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を解くと，

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (c \text{ は任意定数})$$

となるので，$\lambda = 2$ に対する固有ベクトルの 1 つは，$\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ と取れる．

$\lambda = 3$ に対する固有ベクトルを求める．x_1, x_2, x_3, x_4 に関する連立一次方程式

$$(3I_4 - A_4)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 6 & -6 \\ 6 & 7 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 6 & -6 \\ 6 & 8 & 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を解くと，

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (c \text{ は任意定数})$$

となるので，$\lambda = 3$ に対する固有ベクトルの 1 つは，$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ と取れる．以上より，

$$P_4 := \begin{pmatrix} -1 & -5 & -3 & 0 \\ 2 & 6 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

とすると，P_4 は正則で $P_4^{-1}A_4P_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ となる． □

問題 1 補足解説. n 次正方行列 A の対角化可能性，および対角化可能な場合の対角化の結果は以下の手順で求められる：

(Step 1) λ を変数とする多項式 $\Phi_A(\lambda) = |\lambda I_n - A|$(これは A の**固有多項式**と呼ばれる) を考え，$\Phi_A(\lambda) = 0$ の解を重複度込みで求める．この解を λ_1(重複度 m_1)$, \ldots, \lambda_k$(重複度 m_k) とし，A の**固有値**と呼ぶ ($\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ は相異なるとする)．$\Phi_A(\lambda)$ は λ に関する n 次式なので，$m_1 + \cdots + m_k = n$ に注意する．

(Step 1') $m_1 = \cdots = m_k = 1$ のとき (つまり $\Phi_A(\lambda) = 0$ が重解を持たないとき)，この時点で A は対角化可能であることがわかり，対角化の結果得られる対角行列は，

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

である．(このとき $k=n$ であることに注意．)

(Step 2) 各 λ_j $(j=1,\dots,k)$ に対して，$x_1,\dots,x_n$ に関する連立一次方程式

$$(\lambda_j I_n - A)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

を考え，この解を求める．固有値の定義より，これは少なくとも 1 つ以上の任意定数を含む以下の形の解を持つ．この解は，λ_j に対する A の**固有ベクトル**と呼ばれる：

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = c_1\boldsymbol{p}_1^{(j)} + \cdots + c_{\ell_j}\boldsymbol{p}_{\ell_j}^{(j)} \quad (\boldsymbol{p}_1^{(j)},\dots,\boldsymbol{p}_{\ell_j}^{(j)} \in \mathbb{K}^n, c_1,\dots,c_{\ell_j}\text{は任意定数})$$

ここで，任意定数は必要十分な数入っている，つまり $\ell_j = n - \mathrm{rank}(\lambda_j I_n - A)$ であるとする．実はこのとき，$\ell_j \leq m_j$ であり，$\boldsymbol{p}_1^{(j)},\dots,\boldsymbol{p}_{\ell_j}^{(j)}$ は一次独立となる．

(Step 3) ある j が存在して，$\ell_j < m_j$ となるとき，A は対角化不可能である．一方，そうならないとき，つまり，全ての j に対して $\ell_j = m_j$ となるとき，A は対角化可能である．(Step 1' で全ての m_j が 1 のとき A が対角化可能であることがわかるのは，このとき全ての j に対して $1 \leq \ell_j \leq m_j = 1$ で，$\ell_j = m_j$ となるためである．)

(Step 4) A が対角化可能であるとき (つまり，全ての j に対して $\ell_j = m_j$ となるとき)，

$$P := (\boldsymbol{p}_1^{(1)} \cdots \boldsymbol{p}_{m_1}^{(1)}\ \boldsymbol{p}_1^{(2)} \cdots \boldsymbol{p}_{m_2}^{(2)}\ \cdots\ \boldsymbol{p}_1^{(k)} \cdots \boldsymbol{p}_{m_k}^{(k)})$$

とすると，P は n 次正則行列であり，

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \cdots & & \ddots & & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_k \end{pmatrix} \quad (\lambda_1\text{が } m_1\text{個}, \lambda_2\text{が } m_2\text{個}, \dots, \lambda_k\text{が } m_k\text{個})$$

となる．

以上の手順の正当性は次回の講義で解説する．Step 2 で行う連立一次方程式の解の求め方については，次の問題 2(1) の解答例を見て思い出しておいてほしい．以下の点は意識しておいた方が良いであろう：

- 対角化可能な場合，対角化の結果得られる対角行列は固有多項式の重複度込みの根のみから Step1 の時点で既に決まっている．Step 2 以降は実質的には，そもそも対角化が可能かどうかのチェックと，対角化可能な場合はそれに用いられる正則行列を求める作業となっている．
- 上記の Step に従って P を決めれば，$P^{-1}AP$ が対角行列になること，およびその結果は Step 4 に書いたように理論的に決まっているので，その計算を具体的にする必要はない．特に P^{-1} は計算しなくても良い．**ただし，時間があれば検算で計算してみることは大事なことである．**

ちなみに，Step 1 では「$\Phi_A(\lambda)=0$ の解を重複度込みで求める」と書いたが，これで解を n 個得るためには，一般には<u>複素数 $\mathbb{C}$ の範囲で</u>解を探す必要がある．実行列 (= 成分が実数の行列) で対角化可能であるためには，実数 $\mathbb{R}$ の範囲で $\Phi_A(\lambda)=0$ の全ての解が見つかることが必要である (問題 1(3) で見たように十分ではない)，例えば，$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とすると，

$$\Phi_A(\lambda) = \left|\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix}\right| = \lambda^2 + 1 = (\lambda - \sqrt{-1})(\lambda + \sqrt{-1})$$

となるので，この A は実行列による対角化は不可能である．しかし，$\Phi_A(\lambda)=0$ は重解は持っていないので，Step 1' に進めるパターンとなり，複素行列による対角化は可能である．実際，Step 2, 3, 4 を行うと，$P=\begin{pmatrix}\sqrt{-1} & -\sqrt{-1}\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ と求められ，

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\sqrt{-1} & 0\\ 0 & -\sqrt{-1}\end{pmatrix}$$

となる．今までは $\mathbb{R}$ と $\mathbb{C}$ を並行して扱ってきたが，ここでようやく差が出てくるのである． □

問題 2

$A=\begin{pmatrix}5 & 5 & -4 & -3\\ 1 & 1 & -4 & -7\\ 2 & 2 & 3 & 8\end{pmatrix}$ とし，線形写像 $f_A\colon \mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^3,\ \begin{pmatrix}c_1\\ c_2\\ c_3\\ c_4\end{pmatrix}\mapsto A\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\\ c_3\\ c_4\end{pmatrix}$ を考える．

(1) $\mathrm{Ker}\, f_A$ の基底を 1 つ求めよ．

(2) $\mathrm{Im}\, f_A$ の基底を 1 つ求めよ．

問題 2 解答例.

(1) まず，連立一次方程式 $A\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$ の解を求める．この連立 1 次方程式に対応する拡大係数行列を行基本変形を用いて簡約化すると，

$$\left(\begin{array}{cccc|c}5 & 5 & -4 & -3 & 0\\ 1 & 1 & -4 & -7 & 0\\ 2 & 2 & 3 & 8 & 0\end{array}\right)\xrightarrow[\text{第 1 行，第 3 行に加える}]{\text{第 2 行の}-5\text{ 倍}, -2\text{ 倍をそれぞれ}}\left(\begin{array}{cccc|c}0 & 0 & 16 & 32 & 0\\ 1 & 1 & -4 & -7 & 0\\ 0 & 0 & 11 & 22 & 0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{第 1 行を } 1/16 \text{ 倍する}}\left(\begin{array}{cccc|c}0 & 0 & 1 & 2 & 0\\ 1 & 1 & -4 & -7 & 0\\ 0 & 0 & 11 & 22 & 0\end{array}\right)\xrightarrow[\text{第 2 行と第 3 行に加える}]{\text{第 1 行の 4 倍}, -11\text{ 倍をそれぞれ}}\left(\begin{array}{cccc|c}0 & 0 & 1 & 2 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{第 1 行と第 2 行を入れ替える}}\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right).$$

これより，$A\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$ の解は

$$\boldsymbol{c}=\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\\ c_3\\ c_4\end{pmatrix}=t_1\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}+t_2\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ -2\\ 1\end{pmatrix}\quad (t_1,t_2\in\mathbb{R})$$

となる．これより，求める基底の 1 つは $\left\{\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\\ 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ -2\\ 1\end{pmatrix}\right\}$．

(2) A を列基本変形を用いて階段行列にすると，

$$\begin{pmatrix}5 & 5 & -4 & -3\\ 1 & 1 & -4 & -7\\ 2 & 2 & 3 & 8\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 2 列，第 3 列に加える}]{\text{第 1 列の}-1\text{ 倍，1 倍をそれぞれ}}\begin{pmatrix}5 & 0 & 1 & -3\\ 1 & 0 & -3 & -7\\ 2 & 0 & 5 & 8\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第 1 列，第 4 列に加える}]{\text{第 3 列の}-5\text{ 倍，3 倍をそれぞれ}}\begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & 0\\ 16 & 0 & -3 & -16\\ -23 & 0 & 5 & 23\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 4 列に加える}]{\text{第 1 列の 1 倍を}}\begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & 0\\ 16 & 0 & -3 & 0\\ -23 & 0 & 5 & 0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第 2 列と第 3 列を入れ替える}]{\text{第 1 列と第 3 列を入れ替えた後，}}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ -3 & 16 & 0 & 0\\ 5 & -23 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

これより，求める基底の 1 つは，$\left\{\begin{pmatrix}1\\-3\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\16\\23\end{pmatrix}\right\}$. $\square$

問題 2 補足解説. $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$ とする．A を $m\times n$ 行列とし，線形写像 $f_A\colon \mathbb{K}^n\to\mathbb{K}^m, \boldsymbol{x}\mapsto A\boldsymbol{x}$ を考える．核，像の定義より，

$$\begin{aligned}\mathrm{Ker}\, f_A &:= \{\boldsymbol{x}\in\mathbb{K}^n \mid A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\},\\ \mathrm{Im}\, f_A &:= \{A\boldsymbol{x}\in\mathbb{K}^m \mid \boldsymbol{x}\in\mathbb{K}^n\} = \{x_1\boldsymbol{a}_1+x_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{a}_n\in\mathbb{K}^m \mid x_1,x_2\ldots,x_n\in\mathbb{K}\},\end{aligned}$$

(ただし，$A=(\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \cdots\ \boldsymbol{a}_n)$) である．これより，$\mathrm{Ker}\, f_A$ は連立一次方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ の解全体であり，$\mathrm{Im}\, f_A$ は A の列ベクトルで生成される $\mathbb{K}^m$ の部分空間である．

連立一次方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ の解は，拡大係数行列を簡約化して求める方法で求めると，

$$c_1\boldsymbol{p}_1+\cdots+c_k\boldsymbol{p}_k \quad (\boldsymbol{p}_1,\ldots,\boldsymbol{p}_k\in\mathbb{K}^n, c_1,\ldots,c_k\text{は任意定数})$$

という形で求まるが，この方法で求めると，$\boldsymbol{p}_1,\ldots,\boldsymbol{p}_k$ は自動的に一次独立となる (難しくないので具体的な状況を想像して理由を考えてみてほしい)．さらに，この形で書けるものがちょうど $\mathrm{Ker}\, f_A$ 全体であることから，$\boldsymbol{p}_1,\ldots,\boldsymbol{p}_k$ は $\mathrm{Ker}\, f_A$ をベクトル空間として生成している．よって，

上の $\{\boldsymbol{p}_1,\ldots,\boldsymbol{p}_k\}$ が $\mathrm{Ker}\, f_A$ の基底 (の 1 つ)

となる．とくに，$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ の解における任意定数の必要十分な個数 $k=n-\mathrm{rank}\, A$ は $\mathrm{Ker}\, f_A$ の次元ということができる．よって，

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}\, f_A = n-\mathrm{rank}\, A$$

が成立する．

$\mathrm{Im}\, f_A$ について，A に列基本変形を施しても，その変形後の列ベクトルが生成する部分空間は元の A の列ベクトルが生成する部分空間に等しい (これも難しくないので具体的な状況を想像して理由を考えてみてほしい)．式の形で書くと，任意の n 次正則行列 P に対し，

$$\mathrm{Im}\, f_A = \mathrm{Im}\, f_{AP}$$

が成立している．これより，$\mathrm{Im}\, f_A$ は「A に列基本変形を施して階段行列にしたものを考えたとき，その $\boldsymbol{0}$ でない列ベクトルが生成する $\mathbb{K}^m$ の部分空間」ということもできるが，階段行列になった場合，その $\boldsymbol{0}$ でない列ベクトルらは一次独立である．よって，

A を列基本変形によって階段行列にしたときの $\boldsymbol{0}$ でない列ベクトルらが $\mathrm{Im}\, f_A$ の基底 (の 1 つ) をなす

と言える．なお，A に列基本変形を施して階段行列にしたものを考えたときのその $\boldsymbol{0}$ でない列ベクトルの数は $\mathrm{rank}\, A$ に他ならない！よって，以下が成立する．

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Im}\, f_A = \mathrm{rank}\, A.$$

以上をまとめると以下の等式を得る．これは**次元定理**と呼ばれる．

次元定理

$\mathbb{K}=\mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$ とする．A を $m\times n$ 行列とし，線形写像 $f_A\colon \mathbb{K}^n\to\mathbb{K}^m, \boldsymbol{x}\mapsto A\boldsymbol{x}$ を考える．このとき，

$$n=\dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}\, f_A + \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Im}\, f_A.$$

さらに，表現行列の考え方から，線形写像 $f_A\colon \mathbb{K}^n\to\mathbb{K}^m, \boldsymbol{x}\mapsto A\boldsymbol{x}$ は “十分一般の線形写像を表している” ということができ，次元定理も以下の形に一般化して述べることができる：

次元定理 (一般的な形)

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$ とする．V, W を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とし，V は有限次元であるとする．このとき，任意の線形写像 $f\colon V \to W$ に対し，

$$\dim_{\mathbb{K}} V = \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker} f + \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Im} f$$

が成立する．

□