線形代数 II 第 11 回レポート課題解答例

担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)*

問題 1

次の実対称行列を適当な直交行列を用いて対角化せよ．ただし，解答には対角化に用いた直交行列も記述すること．

$$(1)\quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad (2)\quad \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

問題 1 解答例.

<u>(1)</u> $A_1 := \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ の固有多項式は，

$$\begin{aligned}\Phi_{A_1}(\lambda) &= \left|\begin{pmatrix} \lambda-2 & 1 & 0 \\ 1 & \lambda-2 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda-2 \end{pmatrix}\right| \\ &= (\lambda-2)^3+0+0-(\lambda-2)-(\lambda-2)-0 = (\lambda-2)(\lambda-(2+\sqrt{2}))(\lambda-(2-\sqrt{2}))\end{aligned}$$

となるので，A_1 の固有値は $\lambda = 2, 2\pm\sqrt{2}$ である．

$\lambda = 2$ に対する固有ベクトルを求める．x_1, x_2, x_3 に関する連立一次方程式

$$(2I_3 - A_1)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を解くと，

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (c \text{ は任意定数})$$

となるので，$\lambda = 2$ に対する固有ベクトルの 1 つで大きさが 1 のものは，

$$\frac{1}{\sqrt{(-1)^2+0^2+1^2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

と取れる．

$\lambda = 2+\sqrt{2}$ に対する固有ベクトルを求める．x_1, x_2, x_3 に関する連立一次方程式

$$((2+\sqrt{2})I_3 - A_1)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を解くと，

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (c \text{ は任意定数})$$

* *e-mail*：hoya@shibaura-it.ac.jp

となるので，$\lambda=2+\sqrt{2}$ に対する固有ベクトルの 1 つで大きさが 1 のものは，

$$\frac{1}{\sqrt{1^2+(-\sqrt{2})^2+1^2}}\begin{pmatrix}1\\-\sqrt{2}\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/2\\-1/\sqrt{2}\\1/2\end{pmatrix}$$

と取れる．

$\lambda=2-\sqrt{2}$ に対する固有ベクトルを求める．x_1,x_2,x_3 に関する連立一次方程式

$$((2-\sqrt{2})I_3-A_1)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\sqrt{2}&1&0\\1&-\sqrt{2}&1\\0&1&-\sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

を解くと，

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}1\\\sqrt{2}\\1\end{pmatrix}\quad(c\text{ は任意定数})$$

となるので，$\lambda=2-\sqrt{2}$ に対する固有ベクトルの 1 つで大きさが 1 のものは，

$$\frac{1}{\sqrt{1^2+(\sqrt{2})^2+1^2}}\begin{pmatrix}1\\\sqrt{2}\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/2\\1/\sqrt{2}\\1/2\end{pmatrix}$$

と取れる．以上より，

$$O_1:=\begin{pmatrix}-1/\sqrt{2}&1/2&1/2\\0&-1/\sqrt{2}&1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}&1/2&1/2\end{pmatrix}$$

とすると，O_1 は直交行列で $O_1^{-1}A_1O_1=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2+\sqrt{2}&0\\0&0&2-\sqrt{2}\end{pmatrix}$ となる．　□

(2) $A_2:=\begin{pmatrix}1&4&4\\4&1&4\\4&4&1\end{pmatrix}$ の固有多項式は，

$$\begin{aligned}\Phi_{A_2}(\lambda)&=\left|\begin{pmatrix}\lambda-1&-4&-4\\-4&\lambda-1&-4\\-4&-4&\lambda-1\end{pmatrix}\right|\\&=(\lambda-1)^3+(-64)+(-64)-16(\lambda-1)-16(\lambda-1)-16(\lambda-1)\\&=\lambda^3-3\lambda^2-45\lambda-81=(\lambda+3)^2(\lambda-9)\end{aligned}$$

となるので，A_2 の固有値は $\lambda=-3$(重複度 2)$,9$ である．

$\lambda=-3$ に対する固有ベクトルを求める．x_1,x_2,x_3 に関する連立一次方程式

$$(-3I_3-A_2)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4&-4&-4\\-4&-4&-4\\-4&-4&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

を解くと，

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\quad(c_1,c_2\text{は任意定数})$$

となるので，$\lambda=-3$ に対する固有ベクトルの一次独立な組として $\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ が取れる．

$\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2$ を $\mathbb{R}^3$ の内積を用いてグラム・シュミットの直交化法により直交化すると，

$$\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$
$$\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{p}_2 - \frac{(\boldsymbol{u}_1 \underset{\mathbb{R}}{\cdot} \boldsymbol{p}_2)}{(\boldsymbol{u}_1 \underset{\mathbb{R}}{\cdot} \boldsymbol{u}_1)} \boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

さらに，$\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ の大きさをそれぞれ 1 にすると，

$$\frac{1}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 0^2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \frac{1}{\sqrt{(-1/2)^2 + (-1/2)^2 + 1^2}} \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}.$$

　$\lambda = 9$ に対する固有ベクトルを求める．x_1, x_2, x_3 に関する連立一次方程式

$$(9I_3 - A_2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -4 & -4 \\ -4 & 8 & -4 \\ -4 & -4 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を解くと，

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (c \text{ は任意定数})$$

となるので，$\lambda = 9$ に対する固有ベクトルの 1 つで大きさが 1 のものは，

$$\frac{1}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

と取れる．以上より，

$$O_2 := \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

とすると，O_2 は直交行列で $O_2^{-1} A_2 O_2 = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ となる． □

問題 1 補足解説． 本問の前提には以下の定理がある：

定理

実対称行列は，

(1) 必ず対角化可能で，固有値は実数であり，
(2) 対角化は直交行列によって行うことができる．

n 次正方行列 A がある正則行列 P を用いて対角化可能であるとき，(つまり $P^{-1}AP$ が対角行列となるとき)，P の各列ベクトルは A の固有ベクトルであったということを思い出すと，上の定理は，

実対称行列 A に対して，各元が A の固有ベクトルであるような $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底が必ず存在する．

と言い換えることができる．実対称行列 A を直交行列によって対角化するためには，

(Step 1) まず，A を通常の方法で対角化の結果と対角化に必要な正則行列を求め (第 10 回レポート課題解答問題 1 補足解説参照)，

(Step 2) 固有値ごとの固有空間の基底 (=各固有値ごとに選んできたベクトルたち) をグラム・シュミットの直交化法で正規直交基底になおして，再び列ベクトルとして並べれば良い．

但し，Step 2 では固有空間ごとに正規直交化することになるので，本問の解答例では，各固有値ごとにベクトルを選ぶ際に既にグラム・シュミットの直交化法で正規直交基底にして選ぶようにしている．

Step 2 では別の固有空間から選んできたもの同士ではグラム・シュミットの直交化をしていないので，本当にそこも直交しているのか不安になるが，そこはいつも直交するということを定理は保証しているのである．**この事実は検算に用いることができる．** 特に，(1) のように全ての固有値が重複度 1 の場合は，各固有値で選んできたベクトルを正規化 (大きさを 1 に) するだけで，自動的に直交行列が得られるはずなのである．

注意 (対角化の問題に解が複数あることについて)．第 10 回レポート課題の問題 1 でもそうであったが，正方行列 A を対角化する場合，そのために必要な正則行列 P および，対角化の結果 D(つまり，$D = P^{-1}AP$) は以下のように 1 通りには定まらない：

- 対角化の結果 D は対角成分の並べ替えが任意の順に起こりうる．(高々有限通り)
- 対角化に用いる行列 P は無限通りの取り方がある．
- ただし，(当たり前ではあるが，) 対角化に用いる行列 P を定めれば対角化の結果 D は 1 通りに決まる．

P の取り方の任意性については講義でも解説したが，以下の通りである：

P の各列ベクトルは A の各固有値 λ に対して，対応する**固有空間**

$$W(\lambda) := \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n \mid A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}\}$$

の基底となっていれば何でも良い．(対角化の際の $(\lambda I_n - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ という連立一次方程式を解く部分は $W(\lambda)$ の基底を求めているということに他ならない．) 補足すると，連立一次方程式を掃き出し法で解いた際の任意定数の個数は $W(\lambda)$ の次元 $\dim_{\mathbb{K}} W(\lambda)$ に他ならない．対角化可能な場合，$\dim_{\mathbb{K}} W(\lambda)$ は固有値 λ の重複度に一致するが，重複度 1 のときは基底の取り方は定数倍の任意性があり，重複度が 2 以上の場合は定数倍の差以外にも沢山取り方がある．(計算練習ドリル 2 の問題 1 補足解説に例がある．)

さらに本問のように，P を直交行列に取らないといけない場合は，$W(\lambda)$ の基底として**正規直交基底**を取っていれば何でも良いということになる．(例えば重複度が 1 の場合は，定数倍の違いではなく ± 1 倍の違いしか許されなくなる．重複度が 2 以上だと再び無限通りの取り方がある．)

□

問題 2

次のエルミート行列を適当なユニタリ行列を用いて対角化せよ．ただし，解答には対角化に用いたユニタリ行列も記述すること．

$$\begin{pmatrix} 0 & -i & i \\ i & 0 & -1 \\ -i & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ただし，} i = \sqrt{-1}.$$

問題 2 解答例． $A := \begin{pmatrix} 0 & -i & i \\ i & 0 & -1 \\ -i & -1 & 0 \end{pmatrix}$ の固有多項式は，

$$\begin{aligned} \Phi_A(\lambda) &= \left| \begin{pmatrix} \lambda & i & -i \\ -i & \lambda & 1 \\ i & 1 & \lambda \end{pmatrix} \right| \\ &= \lambda^3 + (-1) + (-1) - \lambda - \lambda - \lambda = (\lambda+1)^2(\lambda-2) \end{aligned}$$

となるので，A の固有値は $\lambda = -1$(重複度 2)$, 2$ である．

$\lambda = -1$ に対する固有ベクトルを求める．x_1, x_2, x_3 に関する連立一次方程式

$$(-I_3 - A)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & i & -i \\ -i & -1 & 1 \\ i & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を解くと，

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (c_1, c_2 \text{は任意定数})$$

となるので，$\lambda = -1$ に対する固有ベクトルの一次独立な組として $\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ が取れる．$\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2$ を $\mathbb{C}^3$ のエルミート内積を用いてグラム・シュミットの直交化法により直交化すると，

$$\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{p}_2 - \frac{(\boldsymbol{u}_1 \underset{\mathbb{C}}{\cdot} \boldsymbol{p}_2)}{(\boldsymbol{u}_1 \underset{\mathbb{C}}{\cdot} \boldsymbol{u}_1)} \boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

さらに，$\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ のエルミート内積に関する大きさをそれぞれ 1 にすると，

$$\frac{1}{\sqrt{(-i)i + 1^2 + 0^2}} \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \frac{1}{\sqrt{(i/2)(-i/2) + (1/2)^2 + 1^2}} \begin{pmatrix} -i/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}.$$

$\lambda = 2$ に対する固有ベクトルを求める．x_1, x_2, x_3 に関する連立一次方程式

$$(2I_3 - A) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & i & -i \\ -i & 2 & 1 \\ i & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を解くと，

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (c \text{ は任意定数})$$

となるので，$\lambda = 2$ に対する固有ベクトルの 1 つでエルミート内積に関する大きさが 1 のものは，

$$\frac{1}{\sqrt{(-i)i + (-1)^2 + 1^2}} \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

と取れる．以上より，

$$U := \begin{pmatrix} i/\sqrt{2} & -i/\sqrt{6} & i/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

とすると，U はユニタリ行列で $U^{-1}AU = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ となる． □

問題 2 補足解説． 本問の前提には以下の定理がある：

定理

エルミート行列は，

(1) 必ず対角化可能で，固有値は実数であり，

(2) 対角化はユニタリ行列によって行うことができる．

n 次正方行列 A がある正則行列 P を用いて対角化可能であるとき，(つまり $P^{-1}AP$ が対角行列となるとき)，P の各列ベクトルは A の固有ベクトルであったということを思い出すと，上の定理は，

エルミート行列 A に対して，各元が A の固有ベクトルであるような $\mathbb{C}^n$ の (エルミート内積に関する) 正規直交基底が必ず存在する．

と言い換えることができる．エルミート行列 A をユニタリ行列によって対角化するための方法，および，解答が複数存在することへの注意は問題 1 と全く同様である． □

問題 3

$A = \begin{pmatrix} 7 & 12 & 18 \\ -4 & -8 & -8 \\ 1/2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ としたとき，A^n $(n \in \mathbb{Z}_{>0})$ を求めよ．

問題 3 解答例．

(1) まず，A の対角化と対角化に用いられる正則行列を考える．A の固有多項式は，

$$\begin{aligned}\Phi_A(\lambda) &= \left|\begin{pmatrix} \lambda - 7 & -12 & -18 \\ 4 & \lambda + 8 & 8 \\ -1/2 & 0 & \lambda + 1 \end{pmatrix}\right| \\ &= (\lambda - 7)(\lambda + 8)(\lambda + 1) + 48 + 0 - 0 - (-48(\lambda + 1)) - 9(\lambda + 8) \\ &= \lambda^3 + 2\lambda^2 - 16\lambda - 32 = (\lambda + 4)(\lambda + 2)(\lambda - 4)\end{aligned}$$

となるので，A の固有値は $\lambda = -4, -2, 4$ である．固有値の重複度が全て 1 なので A は対角化可能である．

$\lambda = -4$ に対する固有ベクトルを求める．x_1, x_2, x_3 に関する連立一次方程式

$$(-4I_3 - A)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 & -12 & -18 \\ 4 & 4 & 8 \\ -1/2 & 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を解くと，

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (c \text{ は任意定数})$$

となるので，$\lambda = -4$ に対する固有ベクトルの 1 つは，$\begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ と取れる．

$\lambda = -2$ に対する固有ベクトルを求める．x_1, x_2, x_3 に関する連立一次方程式

$$(-2I_3 - A)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & -12 & -18 \\ 4 & 6 & 8 \\ -1/2 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を解くと，

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (c \text{ は任意定数})$$

となるので，$\lambda = -2$ に対する固有ベクトルの 1 つは，$\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ と取れる．

$\lambda = 4$ に対する固有ベクトルを求める．x_1, x_2, x_3 に関する連立一次方程式

$$(4I_3 - A)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -12 & -18 \\ 4 & 12 & 8 \\ -1/2 & 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を解くと，

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 10 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (c \text{ は任意定数})$$

となるので，$\lambda = 4$ に対する固有ベクトルの 1 つは，$\begin{pmatrix} 10 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ と取れる．以上より，

$$P := \begin{pmatrix} -6 & -2 & 10 \\ 4 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

とすると，P は正則で $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ となる．これより，各 $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し，

$$P^{-1}A^nP = \overbrace{(P^{-1}AP)(P^{-1}AP)\cdots(P^{-1}AP)}^{n \text{ 個}} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} (-4)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix}.$$

これより，両辺に左から P，右から P^{-1} を掛けて

$$A^n = P \begin{pmatrix} (-4)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix} P^{-1}$$

であるが，いま P^{-1} を計算すると，

$$P^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & -4 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

となるので，

$$\begin{aligned} A^n &= \begin{pmatrix} -6 & -2 & 10 \\ 4 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (-4)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & -4 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -6 \cdot (-4)^n + 4 \cdot (-2)^n + 10 \cdot 4^n & -18 \cdot (-4)^n + 8 \cdot (-2)^n + 10 \cdot 4^n & -12 \cdot (-4)^n - 8 \cdot (-2)^n + 20 \cdot 4^n \\ 4 \cdot (-4)^n - 4 \cdot 4^n & 12 \cdot (-4)^n - 4 \cdot 4^n & 8 \cdot (-4)^n - 8 \cdot 4^n \\ (-4)^n - 2 \cdot (-2)^n + 4^n & 3 \cdot (-4)^n - 4 \cdot (-2)^n + 4^n & 2 \cdot (-4)^n + 4 \cdot (-2)^n + 2 \cdot 4^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

□

問題 3 補足解説． 行列の n 乗の計算は対角化の応用の最も典型的なものの 1 つである．やり方は上の解答の通りで，特にこの場合には P^{-1} も具体的に行わないといけないということには注意する．(上では計算を省略しているが好きな方法で計算してもらえれば良い．) □