補足プリント：ベクトル空間の次元に関連する基本事項

大矢 浩徳 (OYA Hironori)*

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$ とする．本プリントでは $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間の次元に関連する基本事項のいくつかを証明する．まず，基底の定義を思い出す．

定義. V を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とする．V の部分集合 B が以下を満たすとき B を V の**基底**という：

(i) V の任意の元が B の元の一次結合で書ける．つまり，任意の $\boldsymbol{v} \in V$ に対し，ある $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{K}$ と $\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_n \in B$ が存在して，$c_1\boldsymbol{b}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{b}_n = \boldsymbol{v}$ となる．(このとき，部分集合 B は V を**ベクトル空間として生成する**という．)

(ii) B は一次独立な集合である．

定理 1 は $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間の基底の元の個数が常に一定であることを主張する．この定理はベクトル空間に次元という概念が定まることを保証する．

定理 1

V を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とする．
V のある基底が n 個 (n は正の整数) の元からなるとすると，V の任意の基底の元の個数は n 個である．

証明. n 個の元からなる V の基底を $B = \{\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_n\}$ とする．さらに V の基底を任意にとり，B' とする．(この時点では B' の元の個数は n 個とは限らず，無限個の可能性もあることに注意する．) そこで，B' の元の個数が n 個であることを示せばよい．

基底の定義 (i) より，ある $p_{ij} \in \mathbb{K}$ $(i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n)$ と相異なる $\boldsymbol{b}'_1, \dots, \boldsymbol{b}'_m \in B'$ が存在して，

$$\boldsymbol{b}_j = \sum_{i=1}^{m} p_{ij}\boldsymbol{b}'_i, \quad j = 1, \dots, n \tag{$*$}$$

と書ける．基底の定義 (ii) より，V の任意の元は $\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_n$ の一次結合で書けるので，$(*)$ より，V の任意の元は $\boldsymbol{b}'_1, \dots, \boldsymbol{b}'_m$ の一次結合で書ける．ここで，$\boldsymbol{b}'_1, \dots, \boldsymbol{b}'_m$ は基底 B' の相異なる元であることから，一次独立であることにも注意すると，$\{\boldsymbol{b}'_1, \dots, \boldsymbol{b}'_m\}$ は基底の定義 (i)，(ii) を満たすので，V の基底となる．さらに，B' に $\boldsymbol{b}'_1, \dots, \boldsymbol{b}'_m$ 以外の元が存在するとすると，その元は $\boldsymbol{b}'_1, \dots, \boldsymbol{b}'_m$ の一次結合で書けることから，B' が一次独立な集合であることに反する．よって，$B' = \{\boldsymbol{b}'_1, \dots, \boldsymbol{b}'_m\}$ であり，特に B' は有限集合である．

ここで，再び基底の定義 (i) より，ある $q_{ij} \in \mathbb{K}$ $(i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m)$ が存在して，

$$\boldsymbol{b}'_j = \sum_{i=1}^{n} q_{ij}\boldsymbol{b}_i, \quad j = 1, \dots, m \tag{$**$}$$

と書ける，行列の記法を用いると，$(*)$，$(**)$ は以下のようにまとめられる：

$$P := \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{m1} & p_{m2} & \cdots & p_{mn} \end{pmatrix} \qquad Q := \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1m} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{n1} & q_{m2} & \cdots & q_{nm} \end{pmatrix}$$

* *e-mail*：hoya@shibaura-it.ac.jp

として，

$$(\boldsymbol{b}'_1,\dots,\boldsymbol{b}'_m)P=(\boldsymbol{b}'_1,\dots,\boldsymbol{b}'_m)\begin{pmatrix}p_{11}&p_{12}&\cdots&p_{1n}\\p_{21}&p_{22}&\cdots&p_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\p_{m1}&p_{m2}&\cdots&p_{mn}\end{pmatrix}=(\boldsymbol{b}_1,\dots,\boldsymbol{b}_n),$$
$$(\boldsymbol{b}_1,\dots,\boldsymbol{b}_n)Q=(\boldsymbol{b}_1,\dots,\boldsymbol{b}_n)\begin{pmatrix}q_{11}&q_{12}&\cdots&q_{1m}\\q_{21}&q_{22}&\cdots&q_{2m}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\q_{n1}&q_{m2}&\cdots&q_{nm}\end{pmatrix}=(\boldsymbol{b}'_1,\dots,\boldsymbol{b}'_m).$$

これより，

$$(\boldsymbol{b}'_1,\dots,\boldsymbol{b}'_m)PQ=(\boldsymbol{b}'_1,\dots,\boldsymbol{b}'_m),\quad(\boldsymbol{b}_1,\dots,\boldsymbol{b}_n)QP=(\boldsymbol{b}_1,\dots,\boldsymbol{b}_n).$$

となる．いま，$PQ=(r_{ij})_{i,j=1,\dots,m}$ とすると，成分ごとに見て上の左の式は，

$$\sum_{i=1}^{m}r_{ij}\boldsymbol{b}'_i=\boldsymbol{b}'_j,\quad j=1,\dots,m$$

を意味するが，$\boldsymbol{b}'_1,\dots,\boldsymbol{b}'_m$ らの一次独立性より，$r_{ij}=\begin{cases}1 & i=j\text{ のとき}\\0 & i\neq j\text{ のとき}\end{cases}$ となり，$PQ=I_m$(I_m は m 次単位行列) であることがわかる．全く同様に，$QP=I_n$ である．

さて，$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}y_1\\\vdots\\y_m\end{pmatrix}$ に関する連立一次方程式 $P\boldsymbol{x}=\mathbf{0}_m$，$Q\boldsymbol{y}=\mathbf{0}_n$ を考える ($\mathbf{0}_m,\mathbf{0}_n$ はそれぞれ m 次，n 次縦零ベクトル)．すると，

$$P\boldsymbol{x}=\mathbf{0}_m\Rightarrow\boldsymbol{x}=I_n\boldsymbol{x}=QP\boldsymbol{x}=Q\mathbf{0}_m=\mathbf{0}_n,$$
$$Q\boldsymbol{y}=\mathbf{0}_n\Rightarrow\boldsymbol{y}=I_m\boldsymbol{y}=PQ\boldsymbol{x}=P\mathbf{0}_n=\mathbf{0}_m,$$

となるので，これらの連立一次方程式の解は任意定数を含まず，一意に定まることがわかる．これより，$\mathrm{rank}(P)=n$, $\mathrm{rank}(Q)=m$ となる (ここでは，この証明の後にある定理※を用いた)，今，P が $m\times n$ 行列，Q が $n\times m$ 行列であることに注意すると，$n=\mathrm{rank}(P)\leq\min\{m,n\}(\leq n)$，$m=\mathrm{rank}(Q)\leq\min\{m,n\}(\leq m)$ なので ($\min\{m,n\}$ は m と n の大きくない方の意味)，$n=\min\{m,n\}=m$.

m は基底 B' の元の個数であったことを思い出すと，示すべきことは示された． □

上の証明中では以下の定理を用いた．これは線形代数 I の範囲であるので，思い出しておいてほしい．

定理※ (線形代数 I の範囲)

A を各成分が $\mathbb{K}$ の元の $m\times n$ 行列とする．このとき，$\boldsymbol{z}=\begin{pmatrix}z_1\\\vdots\\z_n\end{pmatrix}$ に関する連立一次方程式

$$A\boldsymbol{z}=\mathbf{0}_m$$

($\mathbf{0}_m$ は m 次縦零ベクトル) の解が含む任意定数の数 (=解の自由度) は $n-\mathrm{rank}\,A$ である．特に，この解が任意定数を含まない場合 $n=\mathrm{rank}\,A$ である．

定義． n を正の整数又は ∞ とする．$\mathbb{K}$ 上の $\{\mathbf{0}\}$ でないベクトル空間 V が n 個の元からなる基底を持つとき，V の**次元** (dimension) が n であるといい，$n=\dim_{\mathbb{K}}V$ (あるいは単に $\dim V$) と書く．また，$V=\{\mathbf{0}\}$ のときは，$\dim_{\mathbb{K}}V=0$ とする．

定理 1 より，V の基底の元の個数は常に一定であることがわかっていることに注意する．

定理 2

$\mathbb{K}$ 上のベクトル空間 V は必ず基底を持つ．

この定理を証明するには本講義の範囲では準備が足りない．このため，定理 2 は一旦認めることにする．定理 2 により，任意のベクトル空間に次元を定めることができる．

定理 3

V を $\mathbb{K}$ 上の $\{\mathbf{0}\}$ でない有限次元ベクトル空間とし，その次元を n とする．このとき，以下が成立する：

(1) V の n 個の元 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が V をベクトル空間として生成するとき，$\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ は V の基底となる．(つまり，基底の定義条件 (ii) は自動的に満たされる．)

(2) $m \leq n$ とし，$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ を V の m 個の一次独立な元とする．このとき，適切に V の $n-m$ 個の元 $\boldsymbol{v}_{m+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ を加えることで，$\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m, \boldsymbol{v}_{m+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ が V の基底となる．
特に，V の n 個の元 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が一次独立であるとき，$\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ は V の基底となる．(つまり，基底の定義条件 (i) が自動的に満たされる．)

証明．

(1) $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が一次独立であることを示せばよい．$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が一次従属であるとすると，ある $(c_1, \ldots, c_n) \neq (0, \ldots, 0)$ が存在して，

$$c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n = \mathbf{0}$$

となる．このとき，$c_k \neq 0$ となる k をとると，

$$\boldsymbol{v}_k = -\frac{1}{c_k}(c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_{k-1}\boldsymbol{v}_{k-1} + c_{k+1}\boldsymbol{v}_{k+1} + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n)$$

となるので，$\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{k-1}, \boldsymbol{v}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ も V をベクトル空間として生成する．

ここで，$\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{k-1}, \boldsymbol{v}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ が再び一次従属であるとすると，上と全く同じ議論を繰り返すことで，$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{k-1}, \boldsymbol{v}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ からさらに 1 つ元を取り除いてもそれらが V をベクトル空間として生成するようにできる．この操作を繰り返して，一次独立になるまでベクトルを取り除いてゆき，その最終結果を $\{\boldsymbol{v}_{i_1}, \boldsymbol{v}_{i_2}, \ldots, \boldsymbol{v}_{i_k}\}$(元の個数は k 個) とする．(元が 1 つだけになると必ず一次独立なので，この取り除く操作は必ずどこかで終了する．) 元を取り除いているので，$k < n$ であることに注意する．

このとき，上のアルゴリズムから $\{\boldsymbol{v}_{i_1}, \boldsymbol{v}_{i_2}, \ldots, \boldsymbol{v}_{i_k}\}$ は V をベクトル空間として生成し，かつ一次独立であるので V の基底である．しかし，定理 1 より元の個数が n より少ない基底は存在し得ないので，これは矛盾である．よって，$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ は一次独立である． □

(2) $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ に V の元をいくつか加えて V の基底が得られるのであれば，定理 1 より，加えるベクトルの数は $n-m$ 個なので，示すべきことは $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ に V の元をいくつか加えて V の基底が得られるという事実である．V の任意の元 $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_\ell$ に対し，

$$\mathrm{span}_{\mathbb{K}}\{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_\ell\} := \{c_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + c_\ell\boldsymbol{a}_\ell \mid c_1, \ldots, c_\ell \in \mathbb{K}\} \subset V$$

とおく．これは V の部分空間であり，**$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_\ell$ の張る V の部分空間**と呼ばれる．

さて，V の基底を任意に 1 つとり，$\{\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n\}$ とする．$\{\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n\} \subset \mathrm{span}_{\mathbb{K}}\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m\}$ とすると，$V = \mathrm{span}_{\mathbb{K}}\{\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n\} \subset \mathrm{span}_{\mathbb{K}}\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m\} \subset V$ となるので，$\mathrm{span}_{\mathbb{K}}\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m\} = V$．いま，$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ は一次独立でもあるので，このとき $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m\}$ は V の基底となり，特に V の元を加える必要はない ($m = n$)．

次に，$\{\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n\} \not\subset \mathrm{span}_{\mathbb{K}}\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m\}$ とすると，ある $1 \leq k \leq n$ が存在して，$\boldsymbol{b}_k \notin \mathrm{span}_{\mathbb{K}}\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m\}$ となる．このとき，$\boldsymbol{b}_k, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ は一次独立となることを証明する．ある $c, c_1, \ldots, c_m \in \mathbb{K}$ に対し，

$$c\boldsymbol{b}_k + c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_m\boldsymbol{v}_m = \mathbf{0}$$

となったとすると，$c \neq 0$ のとき，$\boldsymbol{b}_k = -\frac{1}{c}(c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_m\boldsymbol{v}_m)$ となるので，$\boldsymbol{b}_k \in \mathrm{span}_{\mathbb{K}}\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m\}$ となって矛盾．よって，$c = 0$ であるが，このとき $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ の一次独立性より，$c = c_1 = \cdots = c_m = 0$ である．よって，$\boldsymbol{b}_k, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ は一次独立となる．

$\{\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n\} \subset \mathrm{span}_{\mathbb{K}}\{\boldsymbol{b}_k, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m\}$ のとき，上と全く同じ議論により，$\{\boldsymbol{b}_k, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m\}$ は V の基底となる．もし，$\{\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n\} \not\subset \mathrm{span}_{\mathbb{K}}\{\boldsymbol{b}_k, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m\}$ のときも，やはり上の議論を繰り返して，$\boldsymbol{b}_{k'} \notin \mathrm{span}_{\mathbb{K}}\{\boldsymbol{b}_k, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m\}$ なる $\boldsymbol{b}_{k'}$ を $\{\boldsymbol{b}_k, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m\}$ に添加し，より大きな一次独立集合を作る．この操作を次々に繰り返すと $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m\}$ に $\{\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n\}$ の元をいくつか ($\boldsymbol{b}_{k_1}, \ldots, \boldsymbol{b}_{k_s}$ とする) 付け加えたところで $\{\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n\} \subset \mathrm{span}_{\mathbb{K}}\{\boldsymbol{b}_{k_1}, \ldots, \boldsymbol{b}_{k_s}, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m\}$ となる．このとき上のアルゴリズムから，$\{\boldsymbol{b}_{k_1}, \ldots, \boldsymbol{b}_{k_s}, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m\}$ は V をベクトル空間として生成し，一次独立なので，V の基底となる (定理 1 より $s = n - m$)．よって示すべきことは示された． $\square$