線形代数 II 計算練習ドリル

担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)

- 代数学 I の成績は中間試験 40 %，期末試験 40 %，レポート 20 %の配分で付けられる．出席等は考慮されない．(『2019 年度線形代数 II 履修上の注意』参照.)
- 期末試験の問題は大問が計 5 つで，問 1〜4 がレポート課題・計算練習ドリルの類題 (90 点分) であり，問 5 が予告無しの問題 (10 点分) である．問 1〜4 のレポート課題の類題は第 1 回から第 6 回の内容が万遍なく出題される．なお，第 6 回のレポート課題の解答は 11 月 14 日 17:00 に Scomb および私の個人ホームページにアップロードされるので確認すること．
- 今回中間試験で出題される問題には「答えのみでよい」というものが多数あるが，これは「答えのみを採点の対象とし，部分点は与えない」という意味を含んでいるので，正確に計算できるように本プリント等で十分に練習すること．また，検算可能な問題は検算をすること．

問題 1. 次の行列式の値を求めよ．

(1) $\left|\begin{pmatrix}-4 & 0 & 2\\ -2 & -1 & -2\\ -1 & 1 & -1\end{pmatrix}\right|$　(2) $\left|\begin{pmatrix}-1 & 2 & 2\\ 1 & -3 & -3\\ 0 & -4 & -4\end{pmatrix}\right|$　(3) $\left|\begin{pmatrix}4 & 1 & -6 & 1\\ -1 & -1 & -1 & -4\\ -6 & -4 & 0 & -5\\ 1 & 1 & -2 & 0\end{pmatrix}\right|$

(4) $\left|\begin{pmatrix}-1 & -1 & -3 & 0\\ 2 & 4 & -5 & -2\\ 0 & 1 & -2 & 1\\ 1 & -3 & 3 & -4\end{pmatrix}\right|$　(5) $\left|\begin{pmatrix}-3 & -1 & 1 & -3 & -3\\ 1 & -3 & 0 & 1 & 2\\ -2 & -2 & -2 & -2 & 0\\ -3 & -1 & 0 & -3 & 2\\ -1 & -1 & 1 & 1 & 0\end{pmatrix}\right|$　(6) $\left|\begin{pmatrix}0 & 0 & 3 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -2\end{pmatrix}\right|$

(7) $\left|\begin{pmatrix}0 & 2 & 3 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & -3 & 7\\ 1 & 4 & 6 & -7 & -2\\ 0 & 0 & 5 & 9 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4\end{pmatrix}\right|$　(8) $\left|\begin{pmatrix}0 & -8 & -3\\ 8 & 0 & -3\\ 3 & 3 & 0\end{pmatrix}\right|$　(9) $\left|\begin{pmatrix}0 & -6 & 3 & -4\\ 6 & 0 & 1 & 3\\ -3 & -1 & 0 & -2\\ 4 & -3 & 2 & 0\end{pmatrix}\right|$

(10) $\left|\begin{pmatrix}0 & 7 & -2 & -4 & 6\\ -7 & 0 & -6 & -8 & -3\\ 2 & 6 & 0 & -3 & 1\\ 4 & 8 & 3 & 0 & -1\\ -6 & 3 & -1 & 1 & 0\end{pmatrix}\right|$　(11) $\left|\begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & 0\\ 7 & -3 & -5 & 1\\ 0 & 2 & 5 & 0\\ 0 & 4 & -7 & -4\end{pmatrix}\right|$　(12) $\left|\begin{pmatrix}-7 & -8 & 0 & 4 & 1\\ -8 & -1 & 5 & -4 & 8\\ 2 & 8 & 0 & -3 & -9\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 4 & 2 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\right|$

(13) $\left|\begin{pmatrix}-1 & -3 & -4 & 5 & -2 & 3\\ 0 & 2 & 8 & -9 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0\\ 5 & 6 & 2 & -7 & 6 & -4\\ 0 & 0 & 4 & -5 & 0 & -1\end{pmatrix}\right|$　(14) $\left|\begin{pmatrix}0 & 5 & 7 & -1 & 4\\ 6 & 3 & -8 & 1 & 6\\ -5 & -5 & 1 & -4 & -8\\ -4 & -8 & -5 & 7 & -6\\ 3 & 5 & 5 & -3 & 4\end{pmatrix}\right|$　(15) $\left|\begin{pmatrix}2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0\\ -1 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2\end{pmatrix}\right|$

問題 2. 以下の行列 A の余因子行列 $\widetilde{A}$ を求めよ．また，A^{-1} が存在する場合その具体形を求めよ．

(1) $A=\begin{pmatrix}-8 & 2\\ 3 & 7\end{pmatrix}$　(2) $A=\begin{pmatrix}0 & -4 & 2\\ 2 & -3 & -3\\ -1 & 2 & -1\end{pmatrix}$　(3) $A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ -1 & 1 & -1\\ 2 & -2 & -1\end{pmatrix}$　(4) $A=\begin{pmatrix}-2 & -2 & 2 & -1\\ 0 & 2 & 1 & -3\\ -3 & -3 & -3 & -1\\ -1 & 1 & 0 & -3\end{pmatrix}$

問題 1 解答.

(1) -18 (2) 0 (3) -89 (4) -32 (5) 248 (6) -12 (7) 120 (8) 0
(9) 1 (10) 0 (11) -56 (12) 330 (13) 48 (14) 0 (15) 0

□

注意 1.

- (6), (7) は適切に行を入れ替えると，三角行列 (対角行列) にすることができるので，交代性と「三角行列の行列式は対角成分の積」を用いれば容易に計算できる．
- サイズが奇数の交代行列の行列式の値は 0 である ((8), (10))．証明は第 3 回レポート課題問題 2(2) の解答例を参照のこと．ただし，サイズが偶数だと 0 にはならないので注意 ((9))．
- (11), (12), (13) は上手く余因子展開すれば簡単に計算することができる．
- (14) は各列の和が 0 になるので行列式の値が 0 となる．第 2 回レポート課題問題 1(2) 参照．

問題 2 解答.

(1) $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & -8 \end{pmatrix}$, $A^{-1} = -\frac{1}{62}\begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & -8 \end{pmatrix}$

(2) $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 18 \\ 5 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 8 \end{pmatrix}$, $A^{-1} = -\frac{1}{18}\begin{pmatrix} 9 & 0 & 18 \\ 5 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 8 \end{pmatrix}$

(3) $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} -3 & -1 & -2 \\ -3 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $|A| = 0$ なので，A^{-1} は存在しない．

(4) $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} -1 & 41 & 13 & -45 \\ -1 & -31 & -11 & 35 \\ 2 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & -24 & -8 & 24 \end{pmatrix}$, $A^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} -1 & 41 & 13 & -45 \\ -1 & -31 & -11 & 35 \\ 2 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & -24 & -8 & 24 \end{pmatrix}$ □

注意 2. 余因子行列 $\widetilde{A}$ の (i,j) 成分は A の$\underline{(j,i)\text{-余因子}}$であったことに注意する．($(i,j)$-余因子の定義は例えば第 3 回レポート課題解答を参照のこと．) また，$A\widetilde{A} = \widetilde{A}A = |A|I_n$ なので，$|A| \neq 0$ のとき，

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\widetilde{A}$$

である．