線形代数 II 計算練習ドリル 2

担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)

- 代数学 I の成績は中間試験 40 %，期末試験 40 %，レポート 20 %の配分で付けられる．出席等は考慮されない．(『2019 年度線形代数 II 履修上の注意』参照.)
- 期末試験の問題は大問が計 7 つで，135 点満点である．100 点を超えた場合でも，$\times 0.4$ した分がそのまま成績に反映される (一方，期末試験後の救済はよほど特別な事情がない限り行われない)．内容はレポート課題 (第 7 回から第 11 回)・計算練習ドリル 2 の類題である．特に対角化ができるようにしておくことは重要である． なお，第 11 回のレポート課題の解答は 11 月 16 日 17:00 に Scomb および私の個人ホームページにアップロードされるので確認すること．
- 今回試験で出題される問題には「答えのみでよい」というものがあるが，これは「答えのみを採点の対象とし，部分点は与えない」という意味を含んでいるので，正確に計算できるように本プリント等で十分に練習すること．また，検算可能な問題は検算を行うこと．

問題 1. 以下の行列がそれぞれ対角化可能かどうかを判定し，対角化可能な場合にはその結果得られる対角行列を求めよ．さらに，対角化可能な場合は対角化に用いられる正則行列も明示せよ．

$$(1)\ \begin{pmatrix} -5 & 0 & 3 \\ 6 & 6 & 6 \\ -4 & -4 & -4 \end{pmatrix} \qquad (2)\ \begin{pmatrix} 3 & -7 & 6 \\ 2 & -6 & 6 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \qquad (3)\ \begin{pmatrix} 4 & -8 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(4)\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -1 & -3 & 1 \\ -1 & -6 & 4 \end{pmatrix} \qquad (5)\ \begin{pmatrix} 6 & -3 & 3 & 3 \\ -5 & -1 & -6 & 3 \\ -2 & 6 & 2 & -6 \\ -4 & 3 & -3 & -1 \end{pmatrix} \qquad (6)\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 8 & 3 & 4 & -4 \\ 1 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

問題 2. 次の実対称行列を適当な直交行列を用いて対角化せよ．ただし，解答には対角化に用いた直交行列も記述すること．

$$(1)\ \begin{pmatrix} 2 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 0 & -2 \\ \sqrt{2} & -2 & 0 \end{pmatrix} \qquad (2)\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix} \qquad (3)\ \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

問題 3. 次のエルミート行列を適当なユニタリ行列を用いて対角化せよ．ただし，解答には対角化に用いたユニタリ行列も記述すること．($i = \sqrt{-1}$)

$$(1)\ \begin{pmatrix} 0 & -i/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ i/\sqrt{2} & 1 & -i \\ 1/\sqrt{2} & i & 1 \end{pmatrix} \quad (2)\ \begin{pmatrix} 7/4 & i/4 & -1/2\sqrt{2} \\ -i/4 & 7/4 & -i/2\sqrt{2} \\ -1/2\sqrt{2} & i/2\sqrt{2} & 3/2 \end{pmatrix} \quad (3)\ \begin{pmatrix} 0 & i/\sqrt{2} & -1/2 & -i/2 \\ -i/\sqrt{2} & -1/2 & i/2\sqrt{2} & -1/2\sqrt{2} \\ -1/2 & -i/2\sqrt{2} & -3/4 & i/4 \\ i/2 & -1/2\sqrt{2} & -i/4 & -3/4 \end{pmatrix}$$

問題 4. $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 & 1 \\ -2 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ とする．このとき，線形写像 $f_A \colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} \mapsto A \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix}$ に関する以下の問に答えよ．

(1) 定義域の基底を $B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$，終域の基底を $B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ としたとき，基底 B_1, B_2 に関する f_A の表現行列を求めよ．

(2) 定義域の基底を $B_1' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$，終域の基底を $B_2' = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ としたとき，基底 B_1', B_2' に関する f_A の表現行列を求めよ．

問題 5. $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -7 \\ 0 & -1 & 6 \\ 6 & 6 & -1 \end{pmatrix}$ とする．このとき，線形写像 $f_A \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \mapsto A \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ に関する以下の問に答えよ．

(1) 定義域の基底を $B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$，終域の基底を $B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ としたとき，基底 B_1, B_2 に関する f_A の表現行列を求めよ．

(2) f_A の定義域，終域の基底を共に $B = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -8 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ としたとき，基底 B に関する f_A の表現行列を求めよ．

問題 6. 2 次以下の $\mathbb{C}$ 係数 1 変数多項式全体の集合を $\mathbb{C}[x]_{\leq 2}$ と書く．つまり，

$$\mathbb{C}[x]_{\leq 2} := \{ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbb{C}\}$$

とする．これを通常の多項式の和とスカラー倍により，$\mathbb{C}$ 上のベクトル空間とみなす．

線形写像

$$F \colon \mathbb{C}[x]_{\leq 2} \to \mathbb{C}[x]_{\leq 2},\ f(x) \mapsto (x^2 + x + 1)f''(x) + 2xf'(x) + f(1)$$

を考える．(例えば，$F(x^2 + 3x + 1) = (x^2 + x + 1)2 + 2x(2x + 3) + 5 = 6x^2 + 8x + 7$，) このとき，$F$ に関する以下の問に答えよ．

(1) 定義域の基底を $B_1 = \{1, x, x^2\}$，終域の基底を $B_2 = \{1, x, x^2\}$ としたとき，基底 B_1, B_2 に関する F の表現行列を求めよ．

(2) 定義域，終域の基底を共に $B = \{1, x + 1, 10x^2 + 5x + 7\}$ としたとき，基底 B に関する F の表現行列を求めよ．

問題 1 解答例. 以下の解答では，対角化可能な場合，その結果得られる対角行列を D，対角化に用いられる正則行列を P と書くことにする．(つまり，問題の行列を A とすると，$D = P^{-1}AP$．) なお，以下の注意も参照のこと．

(1) $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ -3 & -6 & -8 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

(2) $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 9 \\ 3 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

(3) $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(4) 対角化不可能

(5) $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} -5 & -3 & 0 & -3 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 4 \\ 5 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

(6) 対角化不可能

□

問題 1 補足解説. 本問の解き方については，第 10 回レポート課題解答例の問題 1 補足解説を参照のこと．特に，対角化可能性判定のためには全ての固有ベクトルを計算する必要は無いという事実に注意をすること．(重複度が 2 以上の固有値のみに対して，対応する固有ベクトルが生成する部分空間の次元が重複度に一致するかどうかを見れば良い．全ての固有値の重複度が 1 であれば，その時点で対角化可能である．) □

注意. 対角化可能な場合，本問の解答は以下のように 1 通りではない，

- 対角化可能な場合，対角成分の並べ方は任意の順に変わり得る．(ただし，P を決めれば当然 D は一通りに決まる．)
- P の各列ベクトルは定数倍の変化を許す．また，列ベクトルの並べ方は任意に変えて良い．このとき，それに付随して D の対角成分の並び方が変わる．さらに，固有値の重複度が 2 以上の場合，対応する列ベクトルとして，固有ベクトルが生成する部分空間の基底を選べていれば何でも良いので，その選び方は無限にある．例えば，(3) の場合，固有値 2 に対応する固有ベクトルは

  $$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

  の 2 つにとっているが，ここは

  $$\left\{ x \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| x, y \in \mathbb{K} \right\}$$

  の基底であれば何でも良い．例えば，$P = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ -5 & 7 & 1 \end{pmatrix}$ などとしても，

  $$P^{-1} \begin{pmatrix} 4 & -8 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & 3 \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  である．

このように本問は解答が無数にあるので，各自 Mathematica 等の計算ソフトを用いて自分の答えがあっているかどうかの確認してもらいたい．なお，各自が求めた解答の正誤について私 (大矢) まで直接質問に来ることは認めるが，メールでの質問には答えない．

問題 2 解答例. 以下の解答では，対角化の結果得られる対角行列を D，対角化に用いられる直交行列を O と書くことにする．(つまり，問題の行列を A とすると，$D = O^{-1}AO = {}^tOAO$．)

(1) $$D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ O = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ -1/2 & 1/\sqrt{2} & -1/2 \\ 1/2 & 1/\sqrt{2} & 1/2 \end{pmatrix}$$

(2) $$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},\ O = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

(3) $$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},\ O = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & -1/2\sqrt{3} & 1/2 \\ 0 & 0 & 3/2\sqrt{3} & 1/2 \\ 0 & 2/\sqrt{6} & -1/2\sqrt{3} & 1/2 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & -1/2\sqrt{3} & 1/2 \end{pmatrix}$$ □

問題 2 補足解説. 本問の解き方については，第 11 回レポート課題解答例の問題 1 補足解説を参照のこと．また，解が 1 通りでないことについては問題 1 の場合と全く同様である．ただし，問題 1 の場合 P の各列ベクトルは定数倍の違いを許したが，本問の場合は O を直交行列に取らないといけないので，± 1 倍の違いしか許されない．さらに，問題 1 の場合固有値の重複度が 2 以上の部分については，対応する列ベクトルとして，固有ベクトルが生成する部分空間の基底を取ればよいということであったが，本問では単に基底ではなく**正規直交基底**をとる必要がある． □

問題 3 解答例. 以下の解答では，対角化の結果得られる対角行列を D，対角化に用いられるユニタリ行列を U と書くことにする．(つまり，問題の行列を A とすると，$D = U^{-1}AU = U^*AU$．)

(1) $$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ U = \begin{pmatrix} 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -i/\sqrt{2} & i/\sqrt{2} & i/2 \\ 1/\sqrt{2} & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

(2) $$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ U = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{6} & i/2\sqrt{3} & 1/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & i/2 \\ 1/\sqrt{3} & i/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

(3) $$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ U = \begin{pmatrix} i/\sqrt{5} & 2/\sqrt{30} & -i/\sqrt{6} & -i/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 0 & 5/\sqrt{30} & i/2\sqrt{6} & i/2\sqrt{2} \\ 2/\sqrt{5} & i/\sqrt{30} & 1/2\sqrt{6} & 1/2\sqrt{2} \end{pmatrix}$$ □

問題 3 補足解説. 本問の解き方については，第 11 回レポート課題解答例の問題 2 補足解説を参照のこと．また，解が 1 通りでないことについては問題 1 の場合と全く同様である．ただし，問題 1 の場合 P の各列ベクトルは定数倍の違いを許したが，本問の場合は U をユニタリ行列に取らないといけないので，$e^{2\pi i\theta}$ 倍 $(\theta \in \mathbb{R})$ の違いしか許されない．さらに，問題 1 の場合固有値の重複度が 2 以上の部分については，対応する列ベクトルとして，固有ベクトルが生成する部分空間の基底を取ればよいということであったが，本問では単に基底ではなく (エルミート内積に関する) **正規直交基底**をとる必要がある． □

問題 4 解答例.

(1) $$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 & 1 \\ -2 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2/5 & 6/5 \\ 0 & 3 & 16/5 & 3/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ □

問題 4 補足解説. 本問の解き方については，第 9 回レポート課題解答例の問題 1 補足解説を参照のこと．問題 5，6 についても同様である． □

問題 5 解答例.

(1)
$$\begin{pmatrix} 16 & 14 & -9 \\ -20 & -19 & 1 \\ 18 & 18 & 5 \end{pmatrix}$$

(2)
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
□

問題 6 解答例.

(1)
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

(2)
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$
□