線型代数 II 期末試験

担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)

1. 試験時間は 85 分である．
2. 解答は日本語または英語で行うこと．また，どの問の解答であるかを明確に記したうえで解答すること．
3. 名前，学籍番号の書き忘れには十分注意すること．特に解答用紙を 2 枚用いた場合にはその両方に名前，学籍番号が記載されていることを確認すること．記載されていない場合，採点は行わない．
4. 試験終了後，解答が Scomb および私の個人ホームページにアップロードされるので確認すること．

問題 1 (各 15 点)**.** 以下の行列 A_1, A_2 がそれぞれ対角化可能かどうかを判定し，その理由を述べよ．また，対角化可能な場合にはその結果得られる対角行列を求めよ．ただし，対角化に用いられる正則行列を答える必要はない：

$$(1)\quad A_1 = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 \\ 8 & 3 & 6 \\ -9 & 3 & -4 \end{pmatrix} \qquad\qquad (2)\quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

問題 2 (20 点)**.** 次の実対称行列 A を適当な直交行列を用いて対角化せよ．解答には，対角化の結果得られる対角行列とその対角化に用いた直交行列のみ記述すれば良い (途中説明は不要)：

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

※本問に関しては以下の部分点を与える：

対角化の結果得られる対角行列を求めた $\cdots$ 7 点．直交行列ではないが正則行列で対角化できた $\cdots$ 15 点．

問題 3 (10 点)**.** $\mathbb{C}^3$ において，エルミート内積は

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \overline{x_1}y_1 + \overline{x_2}y_2 + \overline{x_3}y_3$$

と定義される．(ただし，$z \in \mathbb{C}$ に対し，$\overline{z}$ は z の複素共役．) このとき，

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2+i \\ 1+2i \\ -2+i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2i \\ -4+i \\ 1-4i \end{pmatrix} \right\} \quad (\text{ただし，} i = \sqrt{-1})$$

にグラム・シュミットの直交化法を行うことで得られる (エルミート内積に関する)$\mathbb{C}^3$ の正規直交基底を求めよ．解答は答えのみで良い．

問題 4 (10 点)**.** $\mathbb{R}^5$ の部分集合

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

は $\mathbb{R}^5$ の基底をなすかどうかを判定し，その理由を述べよ．

問題 5 (10 点)**.** U，V，W を $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間とし，$f\colon U \to V$，$g\colon V \to W$ を線形写像とする．このとき，$\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} g$ が V の部分空間であることを証明せよ．

問題 6 (各 10 点)**.** 2 次以下の $\mathbb{C}$ 係数 1 変数多項式全体の集合を $\mathbb{C}[x]_{\leq 2}$ と書く．つまり，

$$\mathbb{C}[x]_{\leq 2} := \{ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbb{C}\}$$

とする．これを通常の多項式の和とスカラー倍により，$\mathbb{C}$ 上のベクトル空間とみなす．

線形写像

$$F\colon \mathbb{C}[x]_{\leq 2} \to \mathbb{C}[x]_{\leq 2},\ f(x) \mapsto (2x+3)f'(x) - f(x)$$

を考える．(例えば，$F(x^2+3x+1) = (2x+3)(2x+3) - (x^2+3x+1) = 3x^2+9x+8$．) このとき，$F$ に関する以下の問に答えよ．解答は共に<u>答えのみ</u>で良い：

(1) 定義域の基底を $C_1 = \{1, x, x^2\}$，終域の基底を $C_2 = \{1, x+1, x^2+x\}$ としたとき，基底 C_1, C_2 に関する F の表現行列を求めよ．

(2) 定義域，終域の基底を共に $C = \{1, 2x+3, 4x^2+12x+9\}$ としたとき，基底 C に関する F の表現行列を求めよ．

問題 7 (計 35 点)**.** 以下の問に答えよ．

(1) $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ の余因子行列 $\widetilde{A_1}$ を求めよ．ただし，解答は<u>答えのみ</u>で良い．

(2) $A_2 = \begin{pmatrix} 6 & -8 & -3 \\ 2 & -3 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ としたとき，A_2^n $(n \in \mathbb{Z}_{>0})$ を求めよ．解答は<u>途中経過も説明</u>すること．

(3) $A_3 = \begin{pmatrix} 6 & 1 & -1 & 4 \\ -4 & -3 & 3 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ とし，線形写像 $f_{A_3}\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3,\ \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} \mapsto A_3 \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix}$ を考える．このとき，$\operatorname{Im} f_{A_3}$ の基底を 1 つ求めよ．ただし，解答は<u>答えのみ</u>で良い．

(4) 数列 $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$ は

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 2, \quad a_3 = 3, \quad a_{n+3} = -2a_n + a_{n+1} + 2a_{n+2}\ (n \in \mathbb{Z}_{>0})$$

を満たすとする．このとき，この数列の一般項 a_n $(n \in \mathbb{Z}_{>0})$ を求めよ．解答は<u>途中経過も説明</u>すること．

(Hint：各 $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して，$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_{n+2} \\ a_{n+3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \\ a_{n+2} \end{pmatrix}$ が成立する．)

問題は以上である．