線形代数 II 期末試験解答例

担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)*

問題 1 [各 15 点]

以下の行列 A_1, A_2 がそれぞれ対角化可能かどうかを判定し，その理由を述べよ．また，対角化可能な場合にはその結果得られる対角行列を求めよ．ただし，対角化に用いられる正則行列を答える必要はない：

$$(1)\quad A_1 = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 \\ 8 & 3 & 6 \\ -9 & 3 & -4 \end{pmatrix} \qquad (2)\quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

問題 1 解答例.

(1) A_1 の固有多項式は，

$$\begin{aligned}\Phi_{A_1}(\lambda) &= \left|\begin{pmatrix} \lambda-3 & 4 & 0 \\ -8 & \lambda-3 & -6 \\ 9 & -3 & \lambda+4 \end{pmatrix}\right| \\ &= (\lambda-3)(\lambda-3)(\lambda+4) + (-216) + 0 - 18(\lambda-3) - (-32)(\lambda+4) - 0 = (\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda-2)\end{aligned}$$

となるので，A_1 の固有値は $\lambda = -1, 1, 2$ である．固有値の重複度が全て 1 なので A_1 は対角化可能で，対角化の結果得られる対角行列は，

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

□

(2) A_2 の固有多項式は，

$$\begin{aligned}\Phi_{A_2}(\lambda) &= \left|\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda-2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \lambda-1 \end{pmatrix}\right| \\ &= (\lambda+2)\left|\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ -1 & \lambda-2 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda-1 \end{pmatrix}\right| \\ &= (\lambda+2)(\lambda-1)\left|\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ -1 & \lambda-2 \end{pmatrix}\right| \\ &= (\lambda+2)(\lambda-1)\{\lambda(\lambda-2) - (-1)\} = (\lambda+2)(\lambda-1)^3\end{aligned}$$

となるので，A_2 の固有値は $\lambda = -2, 1$(重複度 3) である．

$\lambda = 1$ に対する固有ベクトルを考える．x_1, x_2, x_3, x_4 に関する連立一次方程式

$$(I_4 - A_2)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

* *e-mail*：hoya@shibaura-it.ac.jp

を解くと，

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (c \text{ は任意定数})$$

となるので，固有値 1 に対する固有空間の次元は 1 である．一方，固有値 1 の重複度は 3 であったので，A_2 は対角化不可能である． □

注意．(1) は対角成分を並べる順が違っていても OK．第 11 回レポート課題解答例問題 1 補足解説参照．

問題 2 [20 点]

次の実対称行列 A を適当な直交行列を用いて対角化せよ．解答には，対角化の結果得られる対角行列とその対角化に用いた直交行列のみ記述すれば良い (途中説明は不要)：

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

※本問に関しては以下の部分点を与える：
対角化の結果得られる対角行列を求めた $\cdots$ 7 点．
直交行列ではないが正則行列で対角化できた $\cdots$ 15 点．

問題 2 解答例． 直交行列：$\begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$ 対角化の結果：$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ □

注意．本問においても解答が複数あることについては第 11 回レポート課題解答例問題 1 補足解説を参照のこと．必ずしも解答例と同じでなくても適切な直交行列とそれに対応する対角行列であれば OK である．

問題 3 [10 点]

$\mathbb{C}^3$ において，エルミート内積は

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \overline{x_1}y_1 + \overline{x_2}y_2 + \overline{x_3}y_3$$

と定義される．(ただし，$z \in \mathbb{C}$ に対し，$\overline{z}$ は z の複素共役．) このとき，

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2+i \\ 1+2i \\ -2+i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2i \\ -4+i \\ 1-4i \end{pmatrix} \right\} \quad (\text{ただし，} i = \sqrt{-1})$$

にグラム・シュミットの直交化法を行うことで得られる (エルミート内積に関する)$\mathbb{C}^3$ の正規直交基底を求めよ．解答は答えのみで良い．

問題 3 解答例．

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ i/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2i/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ i/\sqrt{6} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ i/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \right\}$$

□

問題 4 [10 点]

$\mathbb{R}^5$ の部分集合

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

は $\mathbb{R}^5$ の基底をなすかどうかを判定し，その理由を述べよ．

問題 4 解答例． B の各元を各列ベクトルに持つ次の行列を考える．

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 & 0 & 3 \\ -2 & 0 & 4 & -1 & -2 \\ 2 & -4 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ -3 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

この行列 A の行列式が 0 であるか否かが B が $\mathbb{R}^5$ の基底であるか否かに対応する．ここで，A はサイズが奇数の交代行列なので，

$$|A| = 0.$$

よって，B は $\mathbb{R}^5$ の基底ではない． □

注意．第 9 回レポート課題解答例問題 2 補足解説の命題を用いて，解答例の A に対して $\operatorname{rank} A < 5$ であることを示しても良い．実際，$\operatorname{rank} A = 4$ である．

問題 5 [10 点]

U, V, W を $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間とし，$f\colon U \to V$, $g\colon V \to W$ を線形写像とする．このとき, $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} g$ が V の部分空間であることを証明せよ．

問題 5 解答例． U, V, W の零ベクトルをそれぞれ $\mathbf{0}_U, \mathbf{0}_V, \mathbf{0}_W$ と書く．

線形写像 f は $f(\mathbf{0}_U) = \mathbf{0}_V$ を満たすので，$\mathbf{0}_V \in \operatorname{Im} f$ であり，線形写像 g は $g(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$ を満たすので，$\mathbf{0}_V \in \operatorname{Ker} g$ である．よって，$\mathbf{0}_V \in \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} g$.

任意の 2 元 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} g$ をとる．このとき，像の定義よりある $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \in U$ が存在して，$f(\boldsymbol{u}_1) = \boldsymbol{v}_1, f(\boldsymbol{u}_2) = \boldsymbol{v}_2$ となる．これより，

$$\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 = f(\boldsymbol{u}_1) + f(\boldsymbol{u}_2) = f(\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2) \in \operatorname{Im} f$$

である．また，核の定義より，

$$g(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) = g(\boldsymbol{v}_1) + g(\boldsymbol{v}_2) = \mathbf{0}_W + \mathbf{0}_W = \mathbf{0}_W$$

なので，$\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 \in \operatorname{Ker} g$ である．これらより，$\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 \in \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} g$.

任意の $c \in \mathbb{C}$，$\boldsymbol{v} \in \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} g$ をとる．このとき，像の定義よりある $\boldsymbol{u} \in U$ が存在して，$f(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{v}$ となる．これより，

$$c\boldsymbol{v} = cf(\boldsymbol{u}) = f(c\boldsymbol{u}) \in \operatorname{Im} f$$

である．また，核の定義より，

$$g(c\boldsymbol{v}) = cg(\boldsymbol{v}) = c\mathbf{0}_W = \mathbf{0}_W$$

なので，$c\boldsymbol{v} \in \operatorname{Ker} g$ である．これらより，$c\boldsymbol{v} \in \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} g$.

以上より，$\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} g$ は V の部分空間である． □

問題 6 [各 10 点]

2 次以下の $\mathbb{C}$ 係数 1 変数多項式全体の集合を $\mathbb{C}[x]_{\leq 2}$ と書く．つまり，

$$\mathbb{C}[x]_{\leq 2} := \{ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbb{C}\}$$

とする．これを通常の多項式の和とスカラー倍により，$\mathbb{C}$ 上のベクトル空間とみなす．
線形写像

$$F \colon \mathbb{C}[x]_{\leq 2} \to \mathbb{C}[x]_{\leq 2},\ f(x) \mapsto (2x+3)f'(x) - f(x)$$

を考える．(例えば，$F(x^2+3x+1) = (2x+3)(2x+3) - (x^2+3x+1) = 3x^2+9x+8$．) このとき，$F$ に関する以下の問に答えよ．解答は共に答えのみで良い：

(1) 定義域の基底を $C_1 = \{1, x, x^2\}$，終域の基底を $C_2 = \{1, x+1, x^2+x\}$ としたとき，基底 C_1, C_2 に関する F の表現行列を求めよ．

(2) 定義域，終域の基底を共に $C = \{1, 2x+3, 4x^2+12x+9\}$ としたとき，基底 C に関する F の表現行列を求めよ．

問題 6 解答例.

(1) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ □

(2) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ □

問題 7 [計 35 点]

以下の問に答えよ．

(1) $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ の余因子行列 $\widetilde{A_1}$ を求めよ．ただし，解答は答えのみで良い．

(2) $A_2 = \begin{pmatrix} 6 & -8 & -3 \\ 2 & -3 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ としたとき，A_2^n $(n \in \mathbb{Z}_{>0})$ を求めよ．解答は途中経過も説明すること．

(3) $A_3 = \begin{pmatrix} 6 & 1 & -1 & 4 \\ -4 & -3 & 3 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ とし，線形写像 $f_{A_3} \colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3,\ \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} \mapsto A_3 \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix}$ を考える．このとき，$\operatorname{Im} f_{A_3}$ の基底を 1 つ求めよ．ただし，解答は答えのみで良い．

(4) 数列 $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$ は

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 2, \quad a_3 = 3, \quad a_{n+3} = -2a_n + a_{n+1} + 2a_{n+2}\ (n \in \mathbb{Z}_{>0})$$

を満たすとする．このとき，この数列の一般項 a_n $(n \in \mathbb{Z}_{>0})$ を求めよ．解答は途中経過も説明すること．

(Hint：各 $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して，$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_{n+2} \\ a_{n+3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \\ a_{n+2} \end{pmatrix}$ が成立する．)

問題 7 解答例.

(1) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -4 \\ 2 & -2 & -4 \\ 2 & -3 & -6 \end{pmatrix}$ □

(2) まず，A_2 の対角化と対角化に用いられる正則行列を考える．A_2 の固有多項式は，

$$\begin{aligned}\Phi_{A_2}(\lambda) &= \left|\begin{pmatrix} \lambda-6 & 8 & 3 \\ -2 & \lambda+3 & 2 \\ 0 & -2 & \lambda-3 \end{pmatrix}\right| \\ &= (\lambda-6)(\lambda+3)(\lambda-3)+0+12-(-4(\lambda-6))-(-16(\lambda-3))-0 \\ &= \lambda^3-6\lambda^2+11\lambda-6 = (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)\end{aligned}$$

となるので，A_2 の固有値は $\lambda = 1, 2, 3$ である．固有値の重複度が全て 1 なので A_2 は対角化可能である．

$\lambda = 1$ に対する固有ベクトルを求める．x_1, x_2, x_3 に関する連立一次方程式

$$(I_3 - A_2)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 8 & 3 \\ -2 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を解くと，

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (c \text{ は任意定数})$$

となるので，$\lambda = 1$ に対する固有ベクトルの 1 つは，$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ と取れる．

$\lambda = 2$ に対する固有ベクトルを求める．x_1, x_2, x_3 に関する連立一次方程式

$$(2I_3 - A_2)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 8 & 3 \\ -2 & 5 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を解くと，

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad (c \text{ は任意定数})$$

となるので，$\lambda = 2$ に対する固有ベクトルの 1 つは，$\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ と取れる．

$\lambda = 3$ に対する固有ベクトルを求める．x_1, x_2, x_3 に関する連立一次方程式

$$(3I_3 - A_2)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 8 & 3 \\ -2 & 6 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を解くと，

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (c \text{ は任意定数})$$

となるので，$\lambda = 3$ に対する固有ベクトルの 1 つは，$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ と取れる．以上より，

$$P := \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

とすると，P は正則で $P^{-1}A_2P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ となる．これより，各 $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し，

$$P^{-1}A_2^nP = \overbrace{(P^{-1}A_2P)(P^{-1}A_2P)\cdots(P^{-1}A_2P)}^{n\text{ 個}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}.$$

両辺に左から P，右から P^{-1} を掛けて

$$A_2^n = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} P^{-1}$$

であるが，いま P^{-1} を計算すると，

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -5 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

となるので，

$$\begin{aligned} A_2^n &= \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -5 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2+2^n+2\cdot 3^n & 5-2^{n+1}-3^{n+1} & 2-2^n-3^n \\ -2+2^{n+1} & 5-2^{n+2} & 2-2^{n+1} \\ 2-2^{n+2}+2\cdot 3^n & -5+2^{n+3}-3^{n+1} & -2+2^{n+2}-3^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

□

(3) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$ □

(4) 各 $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して，$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_{n+2} \\ a_{n+3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \\ a_{n+2} \end{pmatrix}$ が成立することより，

$$A_4 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

とおくと，$n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \\ a_{n+2} \end{pmatrix} = A_4^{n-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = A_4^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}. \tag{$*$}$$

よって，A_4^{n-1} $(n \in \mathbb{Z}_{>0})$ を求めれば良い．

まず，A_4 の対角化と対角化に用いられる正則行列を考える．A_4 の固有多項式は，

$$\begin{aligned} \Phi_{A_4}(\lambda) &= \left| \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 2 & -1 & \lambda-2 \end{pmatrix} \right| \\ &= \lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 = (\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda-2) \end{aligned}$$

となるので，A_4 の固有値は $\lambda = -1, 1, 2$ である．固有値の重複度が全て 1 なので A_4 は対角化可能である．

$\lambda = -1$ に対する固有ベクトルを求める．x_1, x_2, x_3 に関する連立一次方程式

$$(-I_3 - A_4) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を解くと，

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (c \text{ は任意定数})$$

となるので，$\lambda = -1$ に対する固有ベクトルの 1 つは，$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ と取れる．

$\lambda = 1$ に対する固有ベクトルを求める．x_1, x_2, x_3 に関する連立一次方程式

$$(I_3 - A_4) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を解くと，

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (c \text{ は任意定数})$$

となるので，$\lambda = 1$ に対する固有ベクトルの 1 つは，$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ と取れる．

$\lambda = 2$ に対する固有ベクトルを求める．x_1, x_2, x_3 に関する連立一次方程式

$$(2I_3 - A_4) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を解くと，

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad (c \text{ は任意定数})$$

となるので，$\lambda = 2$ に対する固有ベクトルの 1 つは，$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ と取れる．以上より，

$$P := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

とすると，P は正則で $P^{-1} A_4 P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ となる．これより，各 $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し，

$$P^{-1} A_4^{n-1} P = \overbrace{(P^{-1} A_4 P)(P^{-1} A_4 P) \cdots (P^{-1} A_4 P)}^{n-1 \text{ 個}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{n-1} = \begin{pmatrix} (-1)^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix}.$$

両辺に左から P，右から P^{-1} を掛けて

$$A_4^{n-1} = P \begin{pmatrix} (-1)^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix} P^{-1}$$

であるが，いま P^{-1} を計算すると，

$$P^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 6 & 3 & -3 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

となるので，

$$\begin{aligned} A_4^{n-1} &= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-1)^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 6 & 3 & -3 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6+2\cdot(-1)^{n-1}-2^n & 3-3\cdot(-1)^{n-1} & -3+(-1)^{n-1}+2^n \\ 6+2\cdot(-1)^n-2^{n+1} & 3+3\cdot(-1)^{n-1} & -3+(-1)^n+2^{n+1} \\ 6+2\cdot(-1)^{n-1}-2^{n+2} & 3-3\cdot(-1)^{n-1} & -3+(-1)^{n-1}+2^{n+2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

これより，$(*)$ と合わせて，$n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し，

$$a_n = \frac{1}{6}(6+2\cdot(-1)^{n-1}-2^n+6-6\cdot(-1)^{n-1}-9+3\cdot(-1)^{n-1}+3\cdot 2^n) = \frac{1}{6}(3+(-1)^n+2^{n+1}).$$

$\square$