線型代数 II 中間試験

担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)

1. 試験時間は 85 分である．
2. 解答は日本語または英語で行うこと．また，どの問の解答であるかを明確に記したうえで解答すること．
3. 名前，学籍番号の書き忘れには十分注意すること．特に解答用紙を 2 枚用いた場合にはその両方に名前，学籍番号が記載されていることを確認すること．記載されていない場合，採点は行わない．
4. 試験終了後，すぐに解答が Scomb および私の個人ホームページにアップロードされるので確認すること．

問題 1 (各 6 点)**.** 次の行列式の値を求めよ．解答は全て答えのみで良い：

(1) $\left|\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -4 & -2 & -4 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}\right|$　(2) $\left|\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 0 & -2 \\ -1 & -2 & 2 & 0 \\ -3 & -2 & -4 & -2 \end{pmatrix}\right|$　(3) $\left|\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}\right|$

(4) $\left|\begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & -2 & -3 & 7 \\ -4 & -3 & 2 & -1 & 6 \end{pmatrix}\right|$　(5) $\left|\begin{pmatrix} 0 & 0 & 9 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 & 8 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & -8 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 6 & 1 & -2 & 7 \end{pmatrix}\right|$

問題 2 (各 5 点)**.** 次の文字式を因数分解せよ．解答は全て答えのみで良い：

(1) $\left|\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \end{pmatrix}\right|$　(2) $\left|\begin{pmatrix} x & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & x \end{pmatrix}\right|$

問題 3 (各 5 点)**.** 以下に挙げる行列がそれぞれ逆行列を持つかどうか判定し，その理由を述べよ．

(1) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix} 0 & 5 & -6 & -2 & 3 \\ -5 & 0 & 1 & 7 & 8 \\ 6 & -1 & 0 & 2 & -9 \\ 2 & -7 & -2 & 0 & 4 \\ -3 & -8 & 9 & -4 & 0 \end{pmatrix}$

問題 4 (各 7 点)**.**

(1) 3 次正方行列 A が ${}^tAA = 2I_3(I_3$ は 3 次単位行列$)$，$|A| > 0$ を満たすとき，$|A|$ の値を求めよ．ただし，計算過程も説明すること．

(2) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 2 & -2 & -2 \\ 2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$ の余因子行列 $\widetilde{A}$ を求めよ．また，A^{-1} を求めよ．ただし，解答は答えのみで良い．

(3) 6 次対称群 $\mathfrak{S}_6$ の元 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 6 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ の逆元 σ^{-1} と符号 $\mathrm{sgn}(\sigma)$ を求めよ．ただし，解答は答えのみで良い．

(4) $\mathbb{R}^4$ において，ベクトル $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ と $\boldsymbol{a}' = (a_1', a_2', a_3', a_4')$ が直交するとは

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}' = a_1a_1' + a_2a_2' + a_3a_3' + a_4a_4' = 0$$

となることとする．このとき，$(-1, 0, 2, -2)$，$(1, 2, 0, -4)$，$(-4, -1, -3, 0)$ の全てに直交するベクトルを 1 つ挙げよ．ただし，解答は答えのみで良い．

(5) a を $a > 1$ を満たす実数の定数としたとき，x, y, z に関する連立一次方程式

$$\begin{cases} a^3x + y + z = 1 \\ x + a^2y + z = 1 \\ x + y + az = 1 \end{cases}$$

の解 (x_0, y_0, z_0) は a の値によって異なる．このため，この解を a についての関数と考えて $(x_0, y_0, z_0) = (f(a), g(a), h(a))$ と書く．このとき，$\displaystyle\lim_{a \to \infty} \frac{f(a)}{g(a)}$ を求めよ．ただし，計算過程も説明すること．

問題 5 (10 点)**.** α, β, γ を相異なる 3 つの実数とする．また，任意に 3 つの実数 (こちらは重複があっても良い) d_1, d_2, d_3 をとる．このとき，$f(\alpha) = d_1, f(\beta) = d_2, f(\gamma) = d_3$ を満たす 2 次関数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ がただ 1 つ存在することを証明せよ．(Hint：ファンデルモンド (Vandermonde) 行列式を用いる．)

問題は以上である．