線形代数 II 中間試験解答例

担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)*

問題 1 [各 6 点]

次の行列式の値を求めよ．解答は全て答えのみで良い：

(1) $\left|\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -4 & -2 & -4 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}\right|$ (2) $\left|\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 0 & -2 \\ -1 & -2 & 2 & 0 \\ -3 & -2 & -4 & -2 \end{pmatrix}\right|$ (3) $\left|\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}\right|$

(4) $\left|\begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & -2 & -3 & 7 \\ -4 & -3 & 2 & -1 & 6 \end{pmatrix}\right|$ (5) $\left|\begin{pmatrix} 0 & 0 & 9 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 & 8 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & -8 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 6 & 1 & -2 & 7 \end{pmatrix}\right|$

問題 1 解答例.

(1) -48 (2) 30 (3) -120 (4) 0 (5) -3

□

問題 2 [各 5 点]

次の文字式を因数分解せよ．解答は全て答えのみで良い：

(1) $\left|\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \end{pmatrix}\right|$ (2) $\left|\begin{pmatrix} x & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & x \end{pmatrix}\right|$

問題 2 解答例.

(1) $(a-2)(b-2)(b-a)$ (2) $(x+4)(x-1)^4$

□

問題 3 [各 5 点]

以下に挙げる行列がそれぞれ逆行列を持つかどうか判定し，その理由を述べよ．

(1) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 0 & 5 & -6 & -2 & 3 \\ -5 & 0 & 1 & 7 & 8 \\ 6 & -1 & 0 & 2 & -9 \\ 2 & -7 & -2 & 0 & 4 \\ -3 & -8 & 9 & -4 & 0 \end{pmatrix}$

* *e-mail*：hoya@shibaura-it.ac.jp

問題 3 解答例.

(1)

$$\left|\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right| \quad \text{(第 1, 2, 3 行を第 4 行に加えた.)}$$
$$= 0$$

より，逆行列を持たない． □

(2)

$$\left|\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right| \quad \text{(第 1, 2, 3 行を第 4 行に加えた.)}$$
$$= (-1)^{4+1}\left|\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}\right| \quad \text{(第 4 行に関して余因子展開.)}$$
$$= 2 \neq 0 \quad \text{(下三角行列の行列式は対角成分の積.)}$$

より，逆行列を持つ． □

(3) 与えられた行列はサイズが奇数の交代行列なので，

$$\left|\begin{pmatrix} 0 & 5 & -6 & -2 & 3 \\ -5 & 0 & 1 & 7 & 8 \\ 6 & -1 & 0 & 2 & -9 \\ 2 & -7 & -2 & 0 & 4 \\ -3 & -8 & 9 & -4 & 0 \end{pmatrix}\right| = 0$$

より，逆行列を持たない． □

注意．本問の採点基準は「行列式が正確に計算できているか」・「行列式が 0 であるか無いかを見て正則性を判断できているか」である．行列式の値が間違っている場合，正則性の判定が結果的にあっていても減点がある．解答例では，行列式の計算過程を詳しく各操作の説明付きで書いたが，各操作の説明は無くても減点しない．また，行列式の求め方についても必ずしも解答例と同じである必要はない．ただし，何も説明なく「$|$(与えられた行列)$| = 0$」と当てずっぽうのように書いてあるものについては減点の可能性がある．また，行列式を表す縦棒 (あるいは det) が抜けているものについては減点をする．

問題 4 [各 7 点]

(1) 3 次正方行列 A が ${}^tAA = 2I_3$(I_3 は 3 次単位行列)，$|A| > 0$ を満たすとき，$|A|$ の値を求めよ．ただし，計算過程も説明すること．

(2) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 2 & -2 & -2 \\ 2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$ の余因子行列 $\widetilde{A}$ を求めよ．また，A^{-1} を求めよ．ただし，解答は答えのみで良い．

(3) 6 次対称群 $\mathfrak{S}_6$ の元 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 6 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ の逆元 σ^{-1} と符号 $\mathrm{sgn}(\sigma)$ を求めよ．ただし，解答は答えのみで良い．

(4) $\mathbb{R}^4$ において，ベクトル $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ と $\boldsymbol{a}' = (a'_1, a'_2, a'_3, a'_4)$ が直交するとは

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}' = a_1 a'_1 + a_2 a'_2 + a_3 a'_3 + a_4 a'_4 = 0$$

となることとする．このとき，$(-1, 0, 2, -2)$，$(1, 2, 0, -4)$，$(-4, -1, -3, 0)$ の全てに直交するベクトルを 1 つ挙げよ．ただし，解答は答えのみで良い．

(5) a を $a > 1$ を満たす実数の定数としたとき，x, y, z に関する連立一次方程式

$$\begin{cases} a^3 x + y + z = 1 \\ x + a^2 y + z = 1 \\ x + y + az = 1 \end{cases}$$

の解 (x_0, y_0, z_0) は a の値によって異なる．このため，この解を a についての関数と考えて $(x_0, y_0, z_0) = (f(a), g(a), h(a))$ と書く．このとき，$\displaystyle\lim_{a \to \infty} \frac{f(a)}{g(a)}$ を求めよ．ただし，計算過程も説明すること．

問題 4 解答例.

(1) 行列式の積に関する性質，転置不変性より，

$$|A|^2 = |{}^tA||A| = |{}^tAA| = |2I_3| = 2^3 = 8$$

となる．いま $|A| > 0$ なので，$|A| = 2\sqrt{2}$. □

(2) $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} -6 & 16 & -8 \\ -2 & 5 & -2 \\ -4 & 12 & -6 \end{pmatrix}$, $\quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -8 & 4 \\ 1 & -\frac{5}{2} & 1 \\ 2 & -6 & 3 \end{pmatrix}$. □

(3) $\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 6 & 4 \end{pmatrix}$, $\quad \mathrm{sgn}(\sigma) = -1$. □

(4) $(2, -5, -1, -2)$ □

(5) クラメルの公式より，

$$A = \begin{pmatrix} a^3 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \qquad D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \qquad D_2 = \begin{pmatrix} a^3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

としたとき，$f(a) = \dfrac{|D_1|}{|A|}$, $g(a) = \dfrac{|D_2|}{|A|}$ であるので，$\dfrac{f(a)}{g(a)} = \dfrac{|D_1|}{|D_2|}$. ここで，行列式の具体的表示から，$|D_1|$ は a に関する 3 次式，$|D_2|$ は a に関する 4 次式であるので，

$$\lim_{a \to \infty} \frac{f(a)}{g(a)} = 0.$$

□

問題 5 [10 点]

α,β,γ を相異なる 3 つの実数とする．また，任意に 3 つの実数 (こちらは重複があっても良い) d_1,d_2,d_3 をとる．このとき，$f(\alpha)=d_1, f(\beta)=d_2, f(\gamma)=d_3$ を満たす 2 次関数 $f(x)=ax^2+bx+c$ がただ 1 つ存在することを証明せよ．(Hint：ファンデルモンド (Vandermonde) 行列式を用いる．)

問題 5 解答例. 2 次関数 $f(x)=ax^2+bx+c$ に対し，

$$f(\alpha)=d_1, f(\beta)=d_2, f(\gamma)=d_3 \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} a\alpha^2+b\alpha+c=d_1 \\ a\beta^2+b\beta+c=d_2 \\ a\gamma^2+b\gamma+c=d_3 \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{pmatrix} \alpha^2 & \alpha & 1 \\ \beta^2 & \beta & 1 \\ \gamma^2 & \gamma & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$$

となる．このため，$f(\alpha)=d_1, f(\beta)=d_2, f(\gamma)=d_3$ を満たす 2 次関数 $f(x)=ax^2+bx+c$ が存在することと，

$$\begin{pmatrix} \alpha^2 & \alpha & 1 \\ \beta^2 & \beta & 1 \\ \gamma^2 & \gamma & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} \tag{$*$}$$

を満たす (a,b,c) が存在することは同値である．よって，$(*)$ を満たす (a,b,c) がただ 1 つだけ存在することを証明すればよい．いま，

$$\begin{aligned}
\left|\begin{pmatrix} \alpha^2 & \alpha & 1 \\ \beta^2 & \beta & 1 \\ \gamma^2 & \gamma & 1 \end{pmatrix}\right| &= \left|\begin{pmatrix} \alpha^2 & \alpha & 1 \\ \beta^2-\alpha^2 & \beta-\alpha & 0 \\ \gamma^2-\alpha^2 & \gamma-\alpha & 0 \end{pmatrix}\right| \quad (\text{第 2，3 行に第 1 行の} -1 \text{倍を加えた.}) \\
&= (-1)^{1+3}\left|\begin{pmatrix} (\beta-\alpha)(\beta+\alpha) & \beta-\alpha \\ (\gamma-\alpha)(\gamma+\alpha) & \gamma-\alpha \end{pmatrix}\right| \quad (\text{第 3 列に関して余因子展開.}) \\
&= (\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)\left|\begin{pmatrix} \beta+\alpha & 1 \\ \gamma+\alpha & 1 \end{pmatrix}\right| \quad (\text{多重線型性より.}) \\
&= (\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)(\beta-\gamma) \neq 0 \quad (\alpha,\beta,\gamma \text{は相異なる.})
\end{aligned}$$

となるので，$\begin{pmatrix} \alpha^2 & \alpha & 1 \\ \beta^2 & \beta & 1 \\ \gamma^2 & \gamma & 1 \end{pmatrix}$ は正則．よって，$(*)$ を満たす (a,b,c) はただ 1 つだけ

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^2 & \alpha & 1 \\ \beta^2 & \beta & 1 \\ \gamma^2 & \gamma & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$$

で定まる．これにより，示すべきことは示された． □

問題 5 補足解説. 問題 5 の事実自体は良く知られたものであろう．これは解答例のようにして線形代数の知識で証明することができる．実は同様にして以下の主張が示される (これも事実としては良く知られたものであろう)：

定理.

n を正の整数とする．$\alpha_1,\alpha_2\ldots,\alpha_n$ を相異なる n 個の実数とする．また，任意に n 個の実数 (こちらは重複があっても良い) $d_1,d_2,\ldots,d_n$ をとる．このとき，$f(\alpha_1)=d_1, f(\alpha_2)=d_2,\ldots,f(\alpha_n)=d_n$ を満たす $n-1$ 次関数 $f(x)=a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ がただ 1 つ存在する．

証明は，問題 5 の場合と同様に，

$$f(\alpha_1)=d_1, f(\alpha_2)=d_2,\ldots,f(\alpha_n)=d_n \quad\Leftrightarrow\quad \begin{pmatrix} \alpha_1^{n-1} & \alpha_1^{n-2} & \cdots & 1 \\ \alpha_2^{n-1} & \alpha_2^{n-2} & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_n^{n-1} & \alpha_n^{n-2} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \\ \vdots \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}$$

であることに着目すれば良い．条件を満たす $n-1$ 次関数 $f(x)=a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ の存在は，

$$\begin{pmatrix} \alpha_1^{n-1} & \alpha_1^{n-2} & \cdots & 1 \\ \alpha_2^{n-1} & \alpha_2^{n-2} & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_n^{n-1} & \alpha_n^{n-2} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \\ \vdots \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}$$

を満たす $(a_{n-1}, a_{n-2}\cdots, a_0)$ の存在と同値なので，それがただ 1 つ存在することを証明するためには，

$$\left| \begin{pmatrix} \alpha_1^{n-1} & \alpha_1^{n-2} & \cdots & 1 \\ \alpha_2^{n-1} & \alpha_2^{n-2} & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_n^{n-1} & \alpha_n^{n-2} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \right| \neq 0$$

を証明すれば良いが，いま

$$\left| \begin{pmatrix} \alpha_1^{n-1} & \alpha_1^{n-2} & \cdots & 1 \\ \alpha_2^{n-1} & \alpha_2^{n-2} & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_n^{n-1} & \alpha_n^{n-2} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \right| = \prod_{1\leq i<j\leq n} (\alpha_i - \alpha_j)$$

(ファンデルモンドの行列式：第 2 解レポート課題問題 2 補足解説参照) となるので，α_i $(i=1,\ldots,n)$ らが相異なるとき，この値は 0 でない．これにより，定理が示される．なお，α_i $(i=1,\ldots,n)$ らが相異なることと，ファンデルモンドの行列式が 0 でないことが<u>同値である</u>ということは重要な事実である． □