

線形代数 II 第 11 回本レポート課題

(提出期限 : 12 月 18 日 (金) 17:00*)

担当 : 大矢 浩徳 (OYA Hironori)

学籍番号:

氏名:

問題 1. 以下の \mathbb{C} 上のベクトル空間の間の写像が線形写像であるかどうかを判定し, その判定の理由を述べよ. また, 線形写像である場合, 全射性, 単射性の判定も行い (例えば『全射であるが単射ではない』等), その判定の理由を述べよ.

$$(1) f_1: \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}[x], \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \mapsto (a + b + c) + (b + c)x^3 + ax^5.$$

$$(2) f_2: \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}^3, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a + 2b + 3c + 4d \\ a + b + 3c + 3d \\ -b + c + d \end{pmatrix}.$$

$$(3) f_3: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z = x + iy \mapsto \bar{z} = x - iy \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

$$(4) f_4: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}, \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mapsto \begin{cases} a & a \neq 0 \text{ のとき,} \\ b & a = 0 \text{ のとき.} \end{cases}$$

(次のページに問題 2 があります.)

問題 2. \mathbb{K} を \mathbb{R} または \mathbb{C} とする. V と W を \mathbb{K} 上のベクトル空間とし, $f: V \rightarrow W$ を線形写像とする. このとき以下の問に答えよ.

(1) $U \subset V$ を V の部分空間とする. このとき, W の部分集合

$$f(U) := \{f(\mathbf{u}) \in W \mid \mathbf{u} \in U\}$$

は W の部分空間であることを示せ.

(2) $U' \subset W$ を W の部分空間とする. このとき, V の部分集合

$$f^{-1}(U') := \{\mathbf{v} \in V \mid f(\mathbf{v}) \in U'\}$$

は V の部分空間であることを示せ.

(以下質問・感想欄. 質問・要望・感想等あればお願いします. ここは白紙でも減点されません.)

(以上です.)