線形代数 II 第 1 回本レポート課題解答例

担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)*

問題 1

行列の積

$$\begin{pmatrix} 9 & -3 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

の計算結果は，

$$\begin{pmatrix} \boxed{\text{アイ}} & \boxed{\text{ウエ}} \\ \boxed{\text{オカ}} & \boxed{\text{キク}} \\ \boxed{\text{ケコ}} & \boxed{\text{サシ}} \end{pmatrix}$$

問題 1 解答例. $\begin{pmatrix} 20 & 38 \\ 8 & 9 \\ 36 & 20 \end{pmatrix}$. □

問題 1 補足解説. 行列の積の定義を思い出しておこう．

(i,j) 成分が a_{ij} の $l \times m$ 行列 A と，(i,j) 成分が b_{ij} の $m \times n$ 行列 B に対し，

$$AB = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{l1} & c_{l2} & \cdots & c_{ln} \end{pmatrix}, \quad \text{ただし，} c_{ij} := \sum_{k=1,\ldots,m} a_{ik}b_{kj}$$

例えば，2×3 行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$，$3 \times 2$ 行列 $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}$ に対し，

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \end{pmatrix}$$

となる． □

問題 2

次の行列式の値を求めよ．

(1) $\left|\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\right| = \boxed{\text{アイ}}$

(2) $\left|\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}\right| = \boxed{\text{ウ}}$

(3) $\left|\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 2 \\ 9 & 2 & -2 & 7 \\ -2 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right| = \boxed{\text{エオ}}$

問題 2 解答例.

* *e-mail*：hoya@shibaura-it.ac.jp

(1) -2

(2) 3

(3) 70 □

問題 2 補足解説. 行列式とは明示的には以下のように表示されるものであった.

行列式の明示的表示

n を正の整数とする. $n \times n$ 行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$$

に対して, A の行列式 $\det(A)$ は以下で定義される：

$$\det(A) \coloneqq \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

ここで, S_n は n 文字の置換全体の集合で $\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^k$. ただし, k は σ に対応するあみだくじを書いたときの横棒の本数の数 (σ に対応するあみだくじは無数にあるが, 横棒の本数の偶奇は表し方にはよらない).

また, 行列式を計算する際には行列式の余因子展開が便利であった.

余因子展開

$n \times n$ 行列

$$A = (a_{i,j})_{i,j=1,\ldots,n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

に対して, 以下が成立する：任意の $j = 1, \ldots, n$ に対し,

$$\begin{aligned} |A| &= a_{j1}\widetilde{a_{j1}} + a_{j2}\widetilde{a_{j2}} + \cdots + a_{jn}\widetilde{a_{jn}} \quad (\text{第 } j \text{ 行に関する余因子展開}) \\ &= a_{1j}\widetilde{a_{1j}} + a_{2j}\widetilde{a_{2j}} + \cdots + a_{nj}\widetilde{a_{nj}} \quad (\text{第 } j \text{ 列に関する余因子展開}) \end{aligned}$$

ここで, $\widetilde{a_{ij}} := (-1)^{i+j}|\check{A}_{ij}|$, ただし, $\check{A}_{ij}$ は A から i 行, j 列を取り除いて得られる $(n-1) \times (n-1)$ 行列である. $\widetilde{a_{ij}}$ を (i,j)-**余因子**と呼ぶ.

また, 2×2 行列, 3×3 行列の行列式は公式として覚えておくと良いだろう. **ただし, これ以上のサイズの行列の行列式の公式は "同様" ではないことに注意する!!**

2×2 行列, 3×3 行列の行列式の公式

- $\left|\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right| = ad - bc.$
- $\left|\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\right| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$

(サラスの方法)

問題 2 の計算は以下のように行える.

(1)

$$\left|\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\right| = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2.$$

(2)

$$\left|\begin{pmatrix}2&1&-1\\3&2&0\\4&2&1\end{pmatrix}\right| = 2\cdot 2\cdot 1+1\cdot 0\cdot 4+(-1)\cdot 3\cdot 2-2\cdot 0\cdot 2-1\cdot 3\cdot 1-(-1)\cdot 2\cdot 4=3.$$

(3)

$$\begin{aligned}\left|\begin{pmatrix}1&3&0&0\\5&0&0&2\\9&2&-2&7\\-2&4&0&1\end{pmatrix}\right| &= (-1)^{3+3}(-2)\left|\begin{pmatrix}1&3&0\\5&0&2\\-2&4&1\end{pmatrix}\right| \qquad \text{(第 3 列に関して余因子展開)}\\ &= (-2)\cdot(1\cdot 0\cdot 1+3\cdot 2\cdot(-2)+0\cdot 5\cdot 4-1\cdot 2\cdot 4-3\cdot 5\cdot 1-0\cdot 0\cdot(-2)) \quad \text{(サラスの方法)}\\ &= 70.\end{aligned}$$

□

問題 3

以下の行列を求めよ．

$$\text{(1)}\quad \begin{pmatrix}5&-2\\-2&1\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}\boxed{\text{ア}}&\boxed{\text{イ}}\\\boxed{\text{ウ}}&\boxed{\text{エ}}\end{pmatrix}$$

$$\text{(2)}\quad \begin{pmatrix}1&0&-1\\-1&1&1\\0&-2&1\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}\boxed{\text{オ}}&\boxed{\text{カ}}&\boxed{\text{キ}}\\\boxed{\text{ク}}&\boxed{\text{ケ}}&\boxed{\text{コ}}\\\boxed{\text{サ}}&\boxed{\text{シ}}&\boxed{\text{ス}}\end{pmatrix}$$

問題 3 解答例.

(1) $\begin{pmatrix}1&2\\2&5\end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix}3&2&1\\1&1&0\\2&2&1\end{pmatrix}$ □

問題 3 補足解説. 逆行列については 2×2 の時は公式を覚えておいた方が良い．

2×2 行列の逆行列の一般形

行列式 $ad-bc$ が 0 でない 2×2 行列 $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ に対し，その逆行列は

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}$$

である．

これ以上のサイズの場合は余因子行列を用いる公式があるが，実際の計算においては計算量が多く，あまり有用とは言えない．(理論上は非常に重要！) $n\times n$ の行列 A の逆行列については，以下のように求めるのが良いであろう．

(Step 1) $\widetilde{A}=(A\mid I_n)$ という $n\times 2n$ 行列を用意する．(I_n は n 次単位行列．)
(Step 2) $\widetilde{A}$ を行基本変形を用いて簡約化する．
(Step 3) (Step 2) の結果が，$(I_n\mid B)$ という形になれば，$A^{-1}=B$．このような形にならなかった場合は A は正則ではない．

問題 3 の計算は以下のように行える．

(1)

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{5\cdot 1-(-2)\cdot(-2)}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

(2)

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

を行基本変形により簡約化する．

$$\tilde{A} \xrightarrow{\text{第 1 行を第 2 行に加える}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 3 行に加える}]{\text{第 2 行の 2 倍を}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{第 3 行を第 1 行に加える}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

これより，求める行列は $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. □

問題 4

以下の文の正誤を判定せよ：
『実数を成分に持つ n 次正方行列 A に対し，「A の行列式の値が 0 ではないこと」と，「A に逆行列が存在すること」は同値である．』

問題 4 解答例． 正しい． □

問題 4 補足解説． 数を成分に持つ n 次正方行列 A に対しては，「A の行列式の値が 0 ではないこと」と，「A に逆行列が存在すること」(=A が正則であること) は同値であったので，A の正則性を調べるためには行列式 $\det(A)$ を計算して 0 になるかどうかを調べれば良いのであった．

このついでに n 次正方行列 A に対して，以下の 4 つが全て同値であったことを思い出しておこう：

(1) A は正則である．
(2) $\det(A) \neq 0$.
(3) 連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解は $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ のみである．
(4) $\mathrm{rank}(A) = n$.

□

問題 5

3 次正方行列 A の行列式の値が 1 であるとき，$2A$ の行列式の値は $\boxed{\text{ア}}$ である．

問題 5 解答例． 8. □

問題 5 補足解説． 本問が行列の多重線型性を用いて解くことができる．ここで，多重線型性を含む行列式を特徴づける 3 性質について思い出しておこう．[*1]

[*1] 2020 年度の清水先生の線形代数 I では「この 3 性質を満たすもの」として行列式を定義していた．

行列式の重要 3 性質

$\mathbb{K}$ を $\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ とする．$\mathbb{K}$ の元を成分とする n 次正方行列に対して以下が成立する．ただし，以下の (ii)，(iii) では列ベクトルを並べることで n 次正方行列を表している (各 $\boldsymbol{a}_j$ が n 次元列ベクトル):

(i) $|I_n| = 1$．ただし，I_n は n 次単位行列．(規格化条件)

(ii) 任意の $c, c' \in \mathbb{K}$ に対し，

$$|(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \overset{\substack{j\\ \vee}}{c\boldsymbol{a}_j + c'\boldsymbol{a}'_j}, \cdots, \boldsymbol{a}_n)| = c|(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \overset{\substack{j\\ \vee}}{\boldsymbol{a}_j}, \cdots, \boldsymbol{a}_n)| + c'|(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \overset{\substack{j\\ \vee}}{\boldsymbol{a}'_j}, \cdots, \boldsymbol{a}_n)|.$$

(多重線形性)

(iii) 各 $1 \leq j < j' \leq n$ に対し，

$$|(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \overset{\substack{j\\ \vee}}{\boldsymbol{a}_j}, \ldots, \overset{\substack{j'\\ \vee}}{\boldsymbol{a}_{j'}}, \ldots, \boldsymbol{a}_n)| = -|(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \overset{\substack{j\\ \vee}}{\boldsymbol{a}_{j'}}, \ldots, \overset{\substack{j'\\ \vee}}{\boldsymbol{a}_j}, \ldots, \boldsymbol{a}_n)|$$

(交代性)

問題 5 の計算は以下のように行える．

A を $A = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$(ただし，各 $\boldsymbol{a}_k$ は 3 次元列ベクトル) と表示すると，多重線型性より，

$$|2A| = |(2\boldsymbol{a}_1, 2\boldsymbol{a}_2, 2\boldsymbol{a}_3)| = 2^3\,|(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)| = 8|A| = 8.$$

□

問題 6

以下の階数を求めよ．

$$\mathrm{rank}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 6 & 4 & -8 \\ 2 & -2 & 6 & 6 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & 5 & 9 \end{pmatrix} = \boxed{\text{ア}}$$

問題 6 解答例． 3. □

問題 6 補足解説． 与えられた行列を掃き出し法により簡約化して得られる簡約階段行列の段の数が階数 (rank) である．

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 6 & 4 & -8 \\ 2 & -2 & 6 & 6 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & 5 & 9 \end{pmatrix}$$

を掃き出し法により簡約化する．

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 6 & 4 & -8 \\ 2 & -2 & 6 & 6 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & 5 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{それぞれ第 2,3,4 行に加える}]{\text{第 1 行の} -2 \text{ 倍,} -2 \text{ 倍,} -1 \text{ 倍を}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第 2 行を第 1,4 行に加える}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & -9 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第 3 行を} -1/3 \text{ 倍する}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & -9 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{それぞれ第 1,2,4 行に加える}]{\text{第 1 行の 9 倍,10 倍,2 倍を}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

これより，求める階数は 3. □

問題 7

次の連立一次方程式の解の自由度 (解に現れる必要最小限のパラメータの数) は $\boxed{ア}$ である．

$$\begin{cases} -y+3z+v-w=0 \\ -x-y+3z+v+w=0 \\ -x+2w=0 \\ -2x-3y+9z+3v+w=0 \end{cases}$$

問題 7 解答例． 3． □

問題 7 補足解説． 一般に係数行列が $m\times n$ 行列 A である n 変数連立一次方程式

$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

(ただし，$b_1,\ldots,b_n$ は定数．) を解くためには，拡大係数行列

$$\widetilde{A} = (A \mid \boldsymbol{b}) \qquad \text{ただし，} \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

を行基本変形を用いて簡約化すればよかった．ここで，$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \widetilde{A}$ のときこの連立一次方程式は解を持ち，そうでないとき (つまり $\operatorname{rank} A < \operatorname{rank} \widetilde{A}$ のとき) この連立一次方程式は解無しとなるのであった．

本問の連立一次方程式は，

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ -2 & -3 & 9 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

と表されるので，

$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & -1 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & -3 & 9 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

を簡約化すればよい．この場合は最後の列が全て 0 で，行基本変形の過程においてこの列の成分は常に 0 のままなので，無視して計算しても良い．

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ -2 & -3 & 9 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

を行基本変形により簡約化する．

$$A \xrightarrow[\text{第 1 行と第 2 行を入れ替える}]{\text{第 1 行を} -1 \text{ 倍し，}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ -2 & -3 & 9 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{それぞれ第 3,4 行に加える}]{\text{第 1 行の 1 倍,2 倍を}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow[\text{第 1,2,4 行に加える}]{\text{第 3 行の} -1 \text{ 倍,1 倍,1 倍を}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第 2 行と第 3 行を入れ替える}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

この結果から，与えられた連立一次方程式は最後の行列を係数行列とする連立一次方程式

$$\begin{cases} x-2w=0 \\ y-3z-v+w=0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x=2w \\ y=3z+v-w \end{cases}$$

と同値であるということがわかる．よって，$z = s, v = t, w = u$ とおくと，この解は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ v \\ w \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (s, t, u \text{ は任意のパラメータ})$$

とベクトル表示される．これより，解の自由度は 3 である．

一般的な言葉でまとめておこう．

一般に係数行列が $m \times n$ 行列 A である n 変数連立一次方程式

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{b}$$

について，拡大係数行列を $\widetilde{A} = (A \mid \boldsymbol{b})$ と書くと，

- $\operatorname{rank} A < \operatorname{rank} \widetilde{A}$ のとき，解無し．
- $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \widetilde{A}$ のとき，自由度 $n - \operatorname{rank} A$ で解を持つ．

ここで，常に $\operatorname{rank} A \leq \operatorname{rank} \widetilde{A}$ であることに注意．

□