線形代数 II 第 2 回本レポート課題解答例

担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)*

問題 1

$A = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -5 \\ -5 & 4 & 5 \\ 9 & -1 & -6 \end{pmatrix}$ とする．以下の問に答えよ．

(1) $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ とする．このとき，$P^{-1}AP$ を計算せよ．答えのみで良い．

(2) $m \in \mathbb{Z}$ としたとき，A^m を計算せよ．ただし，計算過程も説明すること．

問題 1 解答例.

(1) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

(2) (1) より，

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

となるので，

$$P^{-1}A^mP = (P^{-1}AP)^m = \begin{pmatrix} (-1)^m & 0 & 0 \\ 0 & 3^m & 0 \\ 0 & 0 & 4^m \end{pmatrix}.$$

この辺々に左から P，右から P^{-1} を掛けて，

$$A^m = P \begin{pmatrix} (-1)^m & 0 & 0 \\ 0 & 3^m & 0 \\ 0 & 0 & 4^m \end{pmatrix} P^{-1}.$$

いま，$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ であるので，

$$\begin{aligned} A^m &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^m & 0 & 0 \\ 0 & 3^m & 0 \\ 0 & 0 & 4^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (-1)^{1+m} + 3^m + 4^m & 3^m - 4^m & (-1)^m - 4^m \\ (-1)^m - 4^m & 4^m & (-1)^{1+m} + 4^m \\ (-1)^{1+m}2 + 3^m + 4^m & 3^m - 4^m & (-1)^m 2 - 4^m \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

□

* *e-mail*：hoya@shibaura-it.ac.jp

問題 1 補足解説． (1) については，P^{-1} を具体的に計算してから $P^{-1}AP$ を具体的に計算しなくても，P を列ごとに抜き出して，

$$\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{p}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

としたとき，

$$A\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = -\boldsymbol{p}_1,\ A\boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 3\boldsymbol{p}_2,\ A\boldsymbol{p}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} = 4\boldsymbol{p}_3$$

となることからわかるのであった (第 2 回講義資料 p.5 上部の計算参照)．ただし，(2) の m 乗計算の際には具体的な P^{-1} が必要になるので，この段階で P^{-1} を計算しておいて，$P^{-1}AP$ が実際に対角行列になるかどうかを確認することで P^{-1} の検算をするというのも悪くないであろう．

P^{-1} の計算は以下のようにできる．この求め方については第 1 回本レポート課題解答例の問題 3 補足解説を参照すること：

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

を行基本変形により簡約化する．

$$\tilde{A} \xrightarrow[\text{それぞれ第 2, 3 行に加える}]{\text{第 1 行の 1 倍, } -2 \text{ 倍を}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{それぞれ第 1, 3 行に加える}]{\text{第 2 行の} -1 \text{ 倍, 1 倍を}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{第 3 行を} -1 \text{ 倍する}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 1 行に加える}]{\text{第 3 行を} -1 \text{ 倍を}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

これより，$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

(2) の m 乗計算については第 2 回講義資料の例 1, 2 を参照すること．また，m 乗計算は検算可能である！ $m = 0$ で単位行列になっているか，$m = 1$ で初めの行列になっているかという 2 点は少なくとも確認するようにしよう． □

問題 2

A, B を n 次複素正方行列 (=複素数成分の正方行列) とし，A の固有値 λ の固有空間を $V(\lambda)$ と書くことにする．つまり，各 $\lambda \in \mathbb{C}$ に対し，

$$V(\lambda) := \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^n \mid A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}\}$$

とする．このとき，ある $c \in \mathbb{C}$ に対して $AB - BA = cB$ が成立しているならば，任意の $\lambda \in \mathbb{C}$ と $\boldsymbol{v} \in V(\lambda)$ に対して，$B\boldsymbol{v} \in V(\lambda + c)$ となることを証明せよ．

問題 2 解答例． 仮定より $AB = BA + cB$ であることに注意すると，任意の $\lambda \in \mathbb{C}$ と $\boldsymbol{v} \in V(\lambda)$ に対して，

$$A(B\boldsymbol{v}) = (AB)\boldsymbol{v} = (BA + cB)\boldsymbol{v} = B(A\boldsymbol{v}) + cB\boldsymbol{v} = B(\lambda\boldsymbol{v}) + cB\boldsymbol{v} = (\lambda + c)B\boldsymbol{v}.$$

よって，$B\boldsymbol{v} \in V(\lambda + c)$． □

問題 2 補足解説． この問題の設定で特に $c = 0$ とすると，『$AB = BA$ のとき，任意の $\boldsymbol{v} \in V(\lambda)$ ($\lambda \in \mathbb{C}$) に対して，$B\boldsymbol{v}$ は再び $V(\lambda)$ に入る』ということがわかる．実はこの性質はこの先の進んだ数学 (例えば表現論等) において非常に良く用いられる便利な性質である．

本問で示した主張について具体的な例を 1 つだけ見ておこう．$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ とする．このとき，

$$AB - BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2B$$

となる．これは本問の仮定で $c = 2$ としたものになっている．いま，

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

なので $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in V(-1)$ であるが，$B \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ は，

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を満たすので，確かに $B \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in V(1) = V(-1+2)$ となっている． $\square$