線形代数 II 第 3 回本レポート課題解答例

担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)*

問題 1

以下の行列を対角化する正則行列 (講義で P と書いていたもの) をそれぞれ求め，それを用いて行列を対角化せよ．ただし，計算の過程も記述すること．

(1) $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ (2) $B = \begin{pmatrix} 7 & 9 & 9 \\ 6 & 12 & 10 \\ -12 & -20 & -18 \end{pmatrix}$ (3) $C = \begin{pmatrix} 0 & -5 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & -3 & -1 \\ 1 & 6 & -4 & -1 \\ -1 & -5 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

問題 1 解答例.

(1) A の固有多項式は，

$$\Phi_A(t) = \left| \begin{pmatrix} t-5 & -1 \\ -4 & t-5 \end{pmatrix} \right| = (t-5)^2 - (-1)(-4) = t^2 - 10t + 21 = (t-3)(t-7)$$

となるので，A の固有値は $3, 7$ である．

固有値 3 に対する固有ベクトルを求める．x_1, x_2 に関する連立一次方程式

$$(3I_2 - A)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を解くと，

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (c \text{ は任意パラメータ})$$

となるので，固有値 3 に対する固有ベクトルの 1 つとして，$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ が取れる．

固有値 7 に対する固有ベクトルを求める．x_1, x_2 に関する連立一次方程式

$$(7I_2 - A)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を解くと，

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (c \text{ は任意パラメータ})$$

となるので，固有値 7 に対する固有ベクトルの 1 つとして，$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ が取れる．

これより，

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

とすると，$\det P = 4$ より A は対角化可能で，

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$

となる．

* *e-mail*: hoya@shibaura-it.ac.jp

(2) B の固有多項式は，

$$
\begin{aligned}
\Phi_B(t) &= \left| \begin{pmatrix} t-7 & -9 & -9 \\ -6 & t-12 & -10 \\ 12 & 20 & t+18 \end{pmatrix} \right| \\
&= (t-7)(t-12)(t+18) + (-9)\cdot(-10)\cdot 12 + (-9)\cdot(-6)\cdot 20 \\
&\quad - (t-7)\cdot(-10)\cdot 20 - (-9)\cdot(-6)\cdot(t+18) - (-9)\cdot(t-12)\cdot 12 \\
&= t^3 - t^2 - 4t + 4 \\
&= (t+2)(t-1)(t-2)
\end{aligned}
$$

となるので，B の固有値は $-2, 1, 2$ である．

固有値 -2 に対する固有ベクトルを求める．x_1, x_2, x_3 に関する連立一次方程式

$$
(-2I_3 - B)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & -9 & -9 \\ -6 & -14 & -10 \\ 12 & 20 & 16 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

を解くと，

$$
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad (c \text{ は任意パラメータ})
$$

となるので，固有値 -2 に対する固有ベクトルの 1 つとして，$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ が取れる．

固有値 1 に対する固有ベクトルを求める．x_1, x_2, x_3 に関する連立一次方程式

$$
(I_3 - B)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -9 & -9 \\ -6 & -11 & -10 \\ 12 & 20 & 19 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

を解くと，

$$
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad (c \text{ は任意パラメータ})
$$

となるので，固有値 1 に対する固有ベクトルの 1 つとして，$\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ が取れる．

固有値 2 に対する固有ベクトルを求める．x_1, x_2, x_3 に関する連立一次方程式

$$
(2I_3 - B)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -9 & -9 \\ -6 & -10 & -10 \\ 12 & 20 & 20 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

を解くと，

$$
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (c \text{ は任意パラメータ})
$$

となるので，固有値 1 に対する固有ベクトルの 1 つとして，$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ が取れる．

これより，

$$
P = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}
$$

とすると，$\det P = 1$ より B は対角化可能で，

$$P^{-1}BP = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

となる．

(3) C の固有多項式は，

$$\begin{aligned}
\Phi_C(t) &= \left| \begin{pmatrix} t & 5 & -1 & 2 \\ -1 & t-5 & 3 & 1 \\ -1 & -6 & t+4 & 1 \\ 1 & 5 & -1 & t+1 \end{pmatrix} \right| \\
&= \left| \begin{pmatrix} 0 & -5t+5 & t-1 & -t^2-t+2 \\ 0 & t & 2 & t+2 \\ 0 & -1 & t+3 & t+2 \\ 1 & 5 & -1 & t+1 \end{pmatrix} \right| \quad (\text{第 4 行の } -t \text{ 倍，1 倍，1 倍をそれぞれ第 } 1,2,3 \text{ 行に加えた}) \\
&= -\left| \begin{pmatrix} -5t+5 & t-1 & -t^2-t+2 \\ t & 2 & t+2 \\ -1 & t+3 & t+2 \end{pmatrix} \right| \quad (\text{第 1 列に関して余因子展開}) \\
&= -\left| \begin{pmatrix} 0 & -5t^2-9t+14 & -6t^2-6t+12 \\ 0 & t^2+3t+2 & t^2+3t+2 \\ -1 & t+3 & t+2 \end{pmatrix} \right| \quad (\text{第 3 行の } -5t+5 \text{ 倍，} t \text{ 倍をそれぞれ第 } 1,2 \text{ 行に加えた}) \\
&= \left| \begin{pmatrix} -5t^2-9t+14 & -6t^2-6t+12 \\ t^2+3t+2 & t^2+3t+2 \end{pmatrix} \right| \quad (\text{第 1 列に関して余因子展開}) \\
&= (t^2+3t+2) \left| \begin{pmatrix} -5t^2-9t+14 & -6t^2-6t+12 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right| \\
&= (t+2)(t+1)((-5t^2-9t+14)-(-6t^2-6t+12)) \\
&= (t+2)(t+1)(t^2-3t+2) \\
&= (t+2)(t+1)(t-1)(t-2)
\end{aligned}$$

となるので，C の固有値は $-2,-1,1,2$ である．

固有値 -2 に対する固有ベクトルを求める．x_1, x_2, x_3, x_4 に関する連立一次方程式

$$(-2I_3 - C)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 5 & -1 & 2 \\ -1 & -7 & 3 & 1 \\ -1 & -6 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を解くと，

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (c \text{ は任意パラメータ})$$

となるので，固有値 -2 に対する固有ベクトルの 1 つとして，$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ が取れる．

固有値 -1 に対する固有ベクトルを求める．x_1, x_2, x_3, x_4 に関する連立一次方程式

$$(-I_3 - C)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 5 & -1 & 2 \\ -1 & -6 & 3 & 1 \\ -1 & -6 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を解くと，

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad (c \text{ は任意パラメータ})$$

となるので，固有値 -2 に対する固有ベクトルの 1 つとして，$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ が取れる．

固有値 1 に対する固有ベクトルを求める．x_1, x_2, x_3, x_4 に関する連立一次方程式

$$(I_3 - C) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & 2 \\ -1 & -4 & 3 & 1 \\ -1 & -6 & 5 & 1 \\ 1 & 5 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を解くと，

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (c \text{ は任意パラメータ})$$

となるので，固有値 1 に対する固有ベクトルの 1 つとして，$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ が取れる．

固有値 2 に対する固有ベクトルを求める．x_1, x_2, x_3, x_4 に関する連立一次方程式

$$(2I_3 - C) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 & 2 \\ -1 & -3 & 3 & 1 \\ -1 & -6 & 6 & 1 \\ 1 & 5 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を解くと，

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (c \text{ は任意パラメータ})$$

となるので，固有値 2 に対する固有ベクトルの 1 つとして，$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ が取れる．

これより，

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

とすると，$\det P = -1$ より C は対角化可能で，

$$P^{-1}CP = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

となる． □

問題 1 補足解説. n 次正方行列 A の対角化は簡単に書けば以下のように行えば良い.

1. まず固有方程式 $\Phi_A(t) = 0$ を解いて A の固有値を求める.
2. 1 で求めたそれぞれの固有値に対して対応する固有空間を連立一次方程式を解くことで計算し，固有ベクトルを求める.
3. 3 で求めた固有ベクトルを並べて正則行列 P を作る.

第 4 回講義で扱う内容であるが，今回のレポート課題のように，A が相異なる n 個の固有値を持つとき (= 固有方程式 $\Phi_A(t) = 0$ が n 個の相異なる解を持つとき)，それぞれの固有値に対応する固有ベクトルを並べてできる行列は実は必ず正則になる．固有方程式 $\Phi_A(t) = 0$ が重解を持つ場合に，「どのように固有ベクトルを選べば正則行列が作れるか?」あるいは「どう選んでも固有ベクトルを並べて正則行列が得られないということ (対角化不可能な場合) はどうすればわかるか?」についても第 4 回講義で扱う.

以下の点は意識しておいた方が良いであろう：

- 対角化可能な場合，対角化の結果得られる対角行列は固有方程式の重複度込みの解のみから既に決まっている (定理 3.4).
- 上記の 1〜3 に従って P を決めれば，$P^{-1}AP$ が対角行列になること，およびその結果は第 2 回講義資料 p.4–5 で解説したように理論的に決まっているので，その計算を具体的にする必要はない．特に P^{-1} は計算しなくても良い．**ただし，時間があれば検算で計算してみることは大事なことである.**

□