線形代数 II 第 4 回本レポート課題解答例

担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)*

問題 1

以下の行列が対角化可能であるかどうかを判定し，対角化可能な場合には行列を対角化する正則行列を求めたうえで行列を対角化せよ．ただし，計算の過程も記述すること．

(1) $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 4 & -8 & 0 \end{pmatrix}$ (2) $B = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 4 \\ 1 & 6 & 3 \\ -2 & -10 & -5 \end{pmatrix}$ (3) $C = \begin{pmatrix} -8 & -9 & -9 \\ -6 & -11 & -9 \\ 12 & 18 & 16 \end{pmatrix}$

問題 1 解答例.

(1) A の固有多項式は，

$$\begin{aligned}\Phi_A(t) &= \left|\begin{pmatrix} t-2 & 4 & -2 \\ -1 & t+2 & 1 \\ -4 & 8 & t \end{pmatrix}\right| \\ &= (t-2)(t+2)t + 4\cdot 1\cdot(-4) + (-2)\cdot(-1)\cdot 8 \\ &\quad - (t-2)\cdot 1\cdot 8 - 4\cdot(-1)\cdot t - (-2)\cdot(t+2)\cdot(-4) \\ &= t^3 - 16t = t(t-4)(t+4)\end{aligned}$$

となるので，A の固有値は $0, \pm 4$ である．A は 3 つの相異なる固有値を持つことより，対角化可能である．

固有値 4 の固有ベクトルを求める．x_1, x_2, x_3 に関する連立一次方程式

$$(4I_3 - A)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ -1 & 6 & 1 \\ -4 & 8 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を解くと，

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (c \text{ は任意パラメータ})$$

となるので，固有値 4 の固有ベクトルの 1 つとして，$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ が取れる．

固有値 0 の固有ベクトルを求める．x_1, x_2, x_3 に関する連立一次方程式

$$(0I_3 - A)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ -4 & 8 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を解くと，

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (c \text{ は任意パラメータ})$$

* *e-mail*：hoya@shibaura-it.ac.jp

となるので，固有値 0 の固有ベクトルの 1 つとして，$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ が取れる．

固有値 -4 の固有ベクトルを求める．x_1, x_2, x_3 に関する連立一次方程式

$$(-4I_3 - A)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \\ -4 & 8 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を解くと，

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (c \text{ は任意パラメータ})$$

となるので，固有値 -4 の固有ベクトルの 1 つとして，$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ が取れる．

以上より，

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

とすると，P は正則で，

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

となる．

(2) B の固有多項式は，

$$\begin{aligned}
\Phi_B(t) &= \left|\begin{pmatrix} t-2 & -7 & -4 \\ -1 & t-6 & -3 \\ 2 & 10 & t+5 \end{pmatrix}\right| \\
&= (t-2)(t-6)(t+5) + (-7)\cdot(-3)\cdot 2 + (-4)\cdot(-1)\cdot 10 \\
&\quad - (t-2)\cdot(-3)\cdot 10 - (-7)\cdot(-1)\cdot(t+5) - (-4)\cdot(t-6)\cdot 2 \\
&= t^3 - 3t^2 + 3t - 1 \\
&= (t-1)^3
\end{aligned}$$

となるので，B の固有値は 1(重複度 3) である．

固有値 1 の固有ベクトルを求める．x_1, x_2, x_3 に関する連立一次方程式

$$(I_3 - B)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -7 & -4 \\ -1 & -5 & -3 \\ 2 & 10 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を解くと，

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (c \text{ は任意パラメータ})$$

となる．これより，固有値 1 の重複度は 3 であるにも関わらず，固有値 1 の 3 個の一次独立な固有ベクトルは存在しないことがわかる．よって，B は対角化不可能である．

(3) C の固有多項式は，

$$\begin{aligned}
\Phi_C(t) &= \left|\begin{pmatrix} t+8 & 9 & 9 \\ 6 & t+11 & 9 \\ -12 & -18 & t-16 \end{pmatrix}\right| \\
&= (t+8)(t+11)(t-16) + 9\cdot 9\cdot(-12) + 9\cdot 6\cdot(-18) \\
&\quad - (t+8)\cdot 9\cdot(-18) - 9\cdot 6\cdot(t-16) - 9\cdot(t+11)\cdot(-12) \\
&= t^3 + 3t^2 - 4 = (t+2)^2(t-1)
\end{aligned}$$

となるので，C の固有値は -2(重複度 2), 1 である．

固有値 -2 の固有ベクトルを求める．x_1, x_2, x_3 に関する連立一次方程式

$$(-2I_3 - C)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 9 \\ 6 & 9 & 9 \\ -12 & -18 & -18 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を解くと，

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (c_1, c_2 \text{は任意パラメータ})$$

となるので，一次独立な 2 つの固有値 -2 の固有ベクトルの組として，$\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ が取れる．

固有値 1 の固有ベクトルを求める．x_1, x_2, x_3 に関する連立一次方程式

$$(I_3 - C)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 9 & 9 \\ 6 & 12 & 9 \\ -12 & -18 & -15 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を解くと，

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (c \text{ は任意パラメータ})$$

となるので，固有値 1 の固有ベクトルの 1 つとして，$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ が取れる．

以上より，

$$P = \begin{pmatrix} -3 & -3 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

とすると，P は正則で，

$$P^{-1}CP = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となる．□

問題 1 補足解説． n 次正方行列の対角化のアルゴリズムに関しては第 4 回講義資料 p.7–8 の (Step 1)〜(Step 4) を参照のこと．今回の問題もこれに従って解けばよい．

正方行列を対角化する行列 P については，各固有空間からその固有値の重複度と同じ分だけ一次独立な固有ベクトルを取って並べて作っていれば何でもよいので，一意的ではない．例えば，(1) の P は各列を (0 でない) 定数倍して，

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 4 \\ 3 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

というようにしても良い．他にも，(3) の P は

$$P = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

というようにしても良い．($\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ も，C の固有値 -2 の固有空間の一次独立な 2 つのベクトルである．確かめてみよ．) □