線形代数 II 第 5 回本レポート課題解答例

担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)*

問題 1

$\mathbb{R}^3$ の 3 つの元の組

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\}$$

が正規直交基底となるような $x, y, z \in \mathbb{R}$ を 1 つ求めよ．ただし，計算過程も記述すること．

問題 1 解答例． 正規直交基底の定義から，与えられた集合が正規直交基底となることと $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ が以下の (i)〜(iii) の全ての条件を満たすことは同値である．

$$\text{(i)} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \qquad \text{(ii)} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} = 0 \qquad \text{(iii)} \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\| = 1$$

よって，次を満たす $x, y, z \in \mathbb{R}$ を求めれば良い．

$$\begin{cases} -\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}} = 0 \\ \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{y}{\sqrt{3}} + \frac{z}{\sqrt{3}} = 0 \\ \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -x + y = 0 \\ x + y + z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}.$$

まず，上の 2 つの式が同時に成り立つことは，$y = x$ かつ $z = -2x$ と同値なので，これを 3 番目の式に代入すると，$x^2 + x^2 + (-2x)^2 = 1$．よって，$6x^2 = 1$ なので，$x = 1/\sqrt{6}$または $-1/\sqrt{6}$．これらより，

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}.$$

□

問題 1 解答例：別解 1 (外積を利用)． $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ が $\begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$ の両方に直交するベクトルで大きさが 1 であれば良い．$\begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$ の両方に直交するベクトルの 1 つはこれらの外積として，

$$\begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \right| \\ -\left| \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \right| \\ \left| \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \right| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

* *e-mail*：hoya@shibaura-it.ac.jp

と得られる．いま，$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$ は

$$\left\| \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(1/\sqrt{6})^2 + (1/\sqrt{6})^2 + (-2/\sqrt{6})^2} = 1$$

も満たすので，

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

が求めるベクトルの 1 つである． □

問題 1 解答例：別解 2 (グラム・シュミットの直交化法を利用). $\boldsymbol{u}_1 \coloneqq \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{u}_2 \coloneqq \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$ とおくと，

$$|(\boldsymbol{u}_1\ \boldsymbol{u}_2\ \boldsymbol{e}_1)| = \left| \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{\sqrt{6}} \neq 0$$

となるので，$\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{e}_1\}$ は一次独立なベクトルのなす集合で，$\mathbb{R}^3$ の基底となる．ここで，

$$\boldsymbol{u}_3' \coloneqq \boldsymbol{e}_1 - (\boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{u}_1 - (\boldsymbol{u}_2 \cdot \boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/6 \\ 1/6 \\ -1/3 \end{pmatrix}$$

とすると，$\boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{u}_2 \cdot \boldsymbol{u}_2 = 1$，$\boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{u}_2 \cdot \boldsymbol{u}_1 = 0$ より，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}_3' &= \boldsymbol{u}_1 \cdot (\boldsymbol{e}_1 - (\boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{u}_1 - (\boldsymbol{u}_2 \cdot \boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{u}_2) \\ &= \boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{e}_1 - (\boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{e}_1)(\boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}_1) - (\boldsymbol{u}_2 \cdot \boldsymbol{e}_1)(\boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}_2) \\ &= \boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{e}_1 = 0 \\ \boldsymbol{u}_2 \cdot \boldsymbol{u}_3' &= \boldsymbol{u}_2 \cdot (\boldsymbol{e}_1 - (\boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{u}_1 - (\boldsymbol{u}_2 \cdot \boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{u}_2) \\ &= \boldsymbol{u}_2 \cdot \boldsymbol{e}_1 - (\boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{e}_1)(\boldsymbol{u}_2 \cdot \boldsymbol{u}_1) - (\boldsymbol{u}_2 \cdot \boldsymbol{e}_1)(\boldsymbol{u}_2 \cdot \boldsymbol{u}_2) \\ &= \boldsymbol{u}_2 \cdot \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{u}_2 \cdot \boldsymbol{e}_1 = 0 \end{aligned}$$

となるので，$\boldsymbol{u}_3'$ は $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$ と直交する．よって，

$$\boldsymbol{u}_3 \coloneqq \frac{1}{\|\boldsymbol{u}_3'\|}\boldsymbol{u}_3'$$

とすると，$\boldsymbol{u}_3$ は $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$ と直交し，

$$\|\boldsymbol{u}_3\| = \sqrt{\boldsymbol{u}_3 \cdot \boldsymbol{u}_3} = \sqrt{\left(\frac{1}{\|\boldsymbol{u}_3'\|}\boldsymbol{u}_3'\right) \cdot \left(\frac{1}{\|\boldsymbol{u}_3'\|}\boldsymbol{u}_3'\right)} = \sqrt{\frac{1}{\|\boldsymbol{u}_3'\|^2}(\boldsymbol{u}_3' \cdot \boldsymbol{u}_3')} = \frac{1}{\|\boldsymbol{u}_3'\|}\sqrt{\boldsymbol{u}_3' \cdot \boldsymbol{u}_3'} = \frac{\|\boldsymbol{u}_3'\|}{\|\boldsymbol{u}_3'\|} = 1$$

となる．よって，$\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$ が正規直交基底となる．よって，$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \boldsymbol{u}_3$ とすれば良いので，$\boldsymbol{u}_3$ を具体的に求めて，

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{(1/6)^2 + (1/6)^2 + (-1/3)^2}} \begin{pmatrix} 1/6 \\ 1/6 \\ -1/3 \end{pmatrix} = \sqrt{6} \begin{pmatrix} 1/6 \\ 1/6 \\ -1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}.$$

□

問題 1 補足解説． 1 つめの解答は正規直交基底の定義を満たすための条件を書き下して解いたものである．この解法より，条件を満たす $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ は，

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}, \ \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

で<u>全て</u>であるということがわかる．(ただし，本問は 1 つ見つければ良いという問なのでどちらかが見つけられていれば減点はしない．)

次に別解 1 は外積を用いて，2 つのベクトルに直交するベクトルを求めたものである．外積 (クロス積) について思い出しておこう．

定義

$\mathbb{R}^3$ の 2 つのベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ に対し，

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} := \begin{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix} \right| \\ -\left| \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix} \right| \\ \left| \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \right| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - b_2a_3 \\ a_3b_1 - b_3a_1 \\ a_1b_2 - b_1a_2 \end{pmatrix}$$

とし，これを $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の**外積**と呼ぶ．$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ は次の性質をもつ：

(1) $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{b} \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = 0$．つまり，$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{a}$ とも $\boldsymbol{b}$ とも直交する．

(2) $\|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}\| = \|\boldsymbol{a}\| \|\boldsymbol{b}\| \sin\theta$ (θ は $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角)．つまり，$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ の大きさは $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が作る平行四辺形の面積に等しい．

この (1) の性質を用いて，二つのベクトルに直交するベクトルを求めたのが別解 1 である．また，外積の性質 (2) より，大きさが 1 の直交する ($\theta = \frac{\pi}{2}$) 二つのベクトルから外積で大きさが 1 のベクトルが得られることも必然である．ただ，実際には直交するベクトルさえわかれば後は大きさが 1 になるようにスカラー倍で調整すれば良いので，大きさを 1 にする部分は本問の難しい部分ではない．

ついでに外積は余因子の言葉を使って表されるということを思い出しておこう．

$$A := \begin{pmatrix} x & a_1 & b_1 \\ y & a_2 & b_2 \\ z & a_3 & b_3 \end{pmatrix} \ \ (x, y, z \text{ は任意})$$

とし，A の (i, j) 余因子 (定義を忘れた方は第 1 回本レポート課題解答 p.2 を参照) を $\widetilde{a_{ij}}$ と書くことにすると，

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} \widetilde{a_{11}} \\ \widetilde{a_{21}} \\ \widetilde{a_{31}} \end{pmatrix}$$

である．この見方をすると，余因子展開の公式から任意の $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} s \\ t \\ u \end{pmatrix}$ に対し，

$$\boldsymbol{v} \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = s\widetilde{a_{11}} + t\widetilde{a_{21}} + u\widetilde{a_{31}} = \left| \begin{pmatrix} s & a_1 & b_1 \\ t & a_2 & b_2 \\ u & a_3 & b_3 \end{pmatrix} \right| = |(\boldsymbol{v} \ \boldsymbol{a} \ \boldsymbol{b})|$$

となることがわかる．これを踏まえると，外積が性質 (1) を持つことは行列式の性質からわかる．なぜなら，

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) = |(\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b})| = 0 \text{ (同じ列があるので)}$$
$$\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) = |(\boldsymbol{b}\ \boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b})| = 0 \text{ (同じ列があるので)}$$

となるからである．(実は性質 (2) も行列式と並行六面体の体積の関係を知っていればこの関係からわかる．) このように，外積は行列式の性質をうまく用いて，二つのベクトルに直交するベクトルを求める方法であったということもできる．この見方をすると，$\mathbb{R}^n$ における (一次独立な)$(n-1)$ 個のベクトル $\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_{n-1}$ のすべてに直交するベクトルを求める公式も同様に得られることがわかる．興味のある方は是非考えてみて欲しい．

別解 2 はグラム・シュミットの直交化法というものを用いる解法である．これについてはこの先の講義で詳しく扱うのでここでは深くは触れない．ただ，解答例を見ればこの方法で一般に与えられたベクトルに直交するベクトルが得られるということが想像されるだろうと期待する．考え方としては，

『まず (直交とは限らない) 基底を何でも良いから取って，そこから余分な部分を削って直交基底にする』

というようなものである． □

問題 2

$\mathbb{C}^n$ のエルミート内積に関する以下の問に答えよ．

(1) 任意の n 次正方行列 A と $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{C}^n$ に対し，

$$(A\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}\cdot(A^*\boldsymbol{y})$$

が成り立つことを証明せよ．ただし，$A^* := {}^t\overline{A}$ (A を転置し，各成分の複素共役をとったもの) である．(ヒント：$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} = {}^t\overline{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{y}$ であることに注意する．ただし，右辺は $1\times n$ 行列 ${}^t\overline{\boldsymbol{x}}$ と $n\times 1$ 行列 $\boldsymbol{y}$ の積で，1×1 行列を複素数と同一視した．)

(2) A の固有値 λ_1 の固有ベクトル $\boldsymbol{v}_1$ と A^* の固有値 λ_2 の固有ベクトル $\boldsymbol{v}_2$ で $\overline{\lambda_1}\neq\lambda_2$ となるものが存在したとき，$\boldsymbol{v}_1$ と $\boldsymbol{v}_2$ は直交することを証明せよ．(ヒント：(1) を用いる．)

問題 2 解答例.

(1) 各 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{C}^n$ に対し，$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} = {}^t\overline{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{y}$ であることに注意すると，任意の n 次正方行列 A に対し，

$$(A\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{y} = {}^t(\overline{A\boldsymbol{x}})\boldsymbol{y} = {}^t(\overline{A}\overline{\boldsymbol{x}})\boldsymbol{y} = ({}^t\overline{\boldsymbol{x}}{}^t\overline{A})\boldsymbol{y} = ({}^t\overline{\boldsymbol{x}}A^*)\boldsymbol{y} = {}^t\overline{\boldsymbol{x}}(A^*\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}\cdot(A^*\boldsymbol{y})$$

となる．

(2) (1) とエルミート内積の性質より，このとき

$$\overline{\lambda_1}(\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_2) = (\lambda_1\boldsymbol{v}_1)\cdot\boldsymbol{v}_2 = (A\boldsymbol{v}_1)\cdot\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{v}_1\cdot(A^*\boldsymbol{v}_2) = \boldsymbol{v}_1\cdot(\lambda_2\boldsymbol{v}_2) = \lambda_2(\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_2)$$

となることがわかる．これより，

$$(\overline{\lambda_1}-\lambda_2)(\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_2) = 0$$

となるが，いま仮定より $\overline{\lambda_1}-\lambda_2\neq 0$ なので，$\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_2 = 0$ である．よって，$\boldsymbol{v}_1$ と $\boldsymbol{v}_2$ は直交する． □

問題 2 補足解説. (1) の性質より，特に U をユニタリ行列 (つまり，$U^*U = I_n$) とすると，任意の $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{C}^n$ に対し，

$$(U\boldsymbol{x})\cdot(U\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}\cdot(U^*U\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}\cdot(I_n\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}$$

となることがわかる．つまり，$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ を一斉に同じユニタリ行列を掛けて変換しても，内積の値は変わらないのである．特に，$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$ とすると，

$$\|U\boldsymbol{x}\| = \sqrt{(U\boldsymbol{x})\cdot(U\boldsymbol{x})} = \sqrt{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}} = \|\boldsymbol{x}\|$$

となることがわかる．ユニタリ行列を掛けるという変換は大きさを変えない変換なのである．

なお，ここでの議論および問題 2 の設定は複素共役を全て無視することで全て $\mathbb{R}^n$ における議論にもできる．このとき，A^* は ${}^tA$ と同じことなので，次が言える．

(1) 任意の n 次実正方行列 A と $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ に対し，

$$(A\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} \cdot ({}^tA\boldsymbol{y})$$

が成り立つ．

(2) 実正方行列 A の $\mathbb{R}^n$ における固有値 λ_1 の固有ベクトル $\boldsymbol{v}_1$ と ${}^tA$ の固有値 λ_2 の固有ベクトル $\boldsymbol{v}_2$ で $\lambda_1 \neq \lambda_2$ となるものが存在したとき，$\boldsymbol{v}_1$ と $\boldsymbol{v}_2$ は直交する．

(3) U を実直交行列とすると，任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ に対し，

$$(U\boldsymbol{x}) \cdot (U\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}.$$

特に，

$$\|U\boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{x}\|.$$

問題 2(2) より，$A = A^*$ が成立するとき，A の固有値が異なる任意の二つの固有ベクトルは直交するということがわかる．$A = A^*$ が成立するとき A を**エルミート行列**と呼ぶが，これはエルミート行列の重要な性質である．これについては今後の講義で再び扱う．なお，問題 2 の設定の $\mathbb{R}$ 版を考えると，$A = {}^tA$ が成立するとき，A の固有値が異なる任意の二つの $\mathbb{R}^n$ 内の固有ベクトルは直交するということもわかる．$A = {}^tA$ が成立するとき A を**対称行列**と呼ぶ．ここでは 1 つ例を見ておこう．

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ とすると，A は実対称行列である．A の固有多項式は

$$\Phi_A = \left| \begin{pmatrix} t-1 & -1 \\ -1 & t+1 \end{pmatrix} \right| = t^2 - 2 = (t+\sqrt{2})(t-\sqrt{2})$$

より，A の固有値は $\pm\sqrt{2}$ である．

$\mathbb{R}^2$ における固有値 $\sqrt{2}$ の固有空間を求めると，

$$V(\sqrt{2}) = \left\{ c \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2}-1 \end{pmatrix} \;\middle|\; c \in \mathbb{R} \right\}.$$

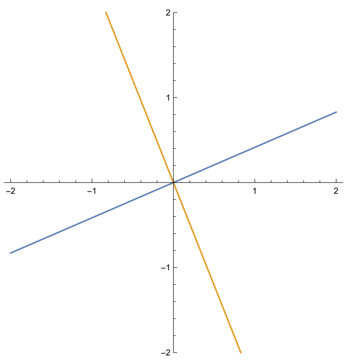
$\mathbb{R}^2$ における固有値 $-\sqrt{2}$ の固有空間を求めると，

$$V(-\sqrt{2}) = \left\{ c \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2}-1 \end{pmatrix} \;\middle|\; c \in \mathbb{R} \right\}.$$

となるが，

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2}-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2}-1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 + (\sqrt{2}-1) \cdot (-\sqrt{2}-1) = 1 + (-1) = 0$$

となるので，固有空間 $V(\sqrt{2})$ と $V(-\sqrt{2})$ は $\mathbb{R}^2$ において確かに直交している (下のグラフの青が $V(\sqrt{2})$，黄色が $V(-\sqrt{2})$)．



□