線形代数 II 第 6 回本レポート課題解答例

担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)*

問題 1

$$\boldsymbol{v}_1 := \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 1+i \end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1+i \\ 1-i \end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_3 := \begin{pmatrix} 2+i \\ i \\ 3i \end{pmatrix}$$

とすると，$\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ は $\mathbb{C}^3$ の基底である．ここからグラム・シュミットの直交化法で得られる $\mathbb{C}^3$ の正規直交基底は

$$\left\{ \begin{pmatrix} i/\sqrt{\boxed{\text{ア}}} \\ 0 \\ (1+i)/\sqrt{\boxed{\text{イ}}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} (\boxed{\text{ウ}} + \boxed{\text{エ}}i)/\sqrt{\boxed{\text{オ}}} \\ (\boxed{\text{カ}} + \boxed{\text{キ}}i)/\sqrt{\boxed{\text{ク}}} \\ (\boxed{\text{ケ}} + \boxed{\text{コ}}i)/\sqrt{\boxed{\text{サ}}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} (\boxed{\text{シ}} + \boxed{\text{ス}}i)/\sqrt{\boxed{\text{セ}}} \\ (\boxed{\text{ソ}} + \boxed{\text{タ}}i)/\sqrt{\boxed{\text{チ}}} \\ (\boxed{\text{ツ}} + \boxed{\text{テ}}i)/\sqrt{\boxed{\text{ト}}} \end{pmatrix} \right\}$$

である．ただし，ここでの $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ を講義資料 p.5 のアルゴリズムの説明にあらわれる $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ としてグラム・シュミットの直交化を行うこと．$\boxed{\text{ア}}$〜$\boxed{\text{ト}}$ に入る整数を求めよ．

問題 1 解答例. グラム・シュミットの直交化法のアルゴリズムに従って計算すれば良い．まず，

$$\boldsymbol{u}'_1 := \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 1+i \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{u}'_2 := \boldsymbol{v}_2 - \frac{(\boldsymbol{u}'_1 \cdot \boldsymbol{v}_2)}{(\boldsymbol{u}'_1 \cdot \boldsymbol{u}'_1)}\boldsymbol{u}'_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1+i \\ 1-i \end{pmatrix} - \frac{(-i)\cdot 0 + 0\cdot(1+i) + (1-i)\cdot(1-i)}{(-i)\cdot i + 0\cdot 0 + (1-i)\cdot(1+i)} \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 1+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 1+i \\ (1-i)/3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}'_3 &:= \boldsymbol{v}_3 - \frac{(\boldsymbol{u}'_1 \cdot \boldsymbol{v}_3)}{(\boldsymbol{u}'_1 \cdot \boldsymbol{u}'_1)}\boldsymbol{u}'_1 - \frac{(\boldsymbol{u}'_2 \cdot \boldsymbol{v}_3)}{(\boldsymbol{u}'_2 \cdot \boldsymbol{u}'_2)}\boldsymbol{u}'_2 \\
&= \begin{pmatrix} 2+i \\ i \\ 3i \end{pmatrix} - \frac{(-i)\cdot(2+i) + 0\cdot i + (1-i)\cdot 3i}{(-i)\cdot i + 0\cdot 0 + (1-i)\cdot(1+i)} \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 1+i \end{pmatrix} \\
&\quad - \frac{(-2/3)\cdot(2+i) + (1-i)\cdot i + ((1+i)/3)\cdot 3i}{(-2/3)^2 + (1-i)\cdot(1+i) + ((1+i)/3)\cdot((1-i)/3)} \begin{pmatrix} -2/3 \\ 1+i \\ (1-i)/3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 \\ 1+i \\ -1+i \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

* *e-mail*：hoya@shibaura-it.ac.jp

とし，$\boldsymbol{u}_1', \boldsymbol{u}_2', \boldsymbol{u}_3'$ の大きさをそれぞれ 1 にすればよいので，求める正規直交基底 $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$ は，

$$\boldsymbol{u}_1 \coloneqq \frac{1}{\|\boldsymbol{u}_1'\|}\boldsymbol{u}_1' = \frac{1}{\sqrt{(-i)\cdot i + 0\cdot 0 + (1-i)\cdot(1+i)}} = \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 1+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i/\sqrt{3} \\ 0 \\ (1+i)/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{u}_2 \coloneqq \frac{1}{\|\boldsymbol{u}_2'\|}\boldsymbol{u}_2' = \frac{1}{\sqrt{(-2/3)^2 + (1-i)\cdot(1+i) + ((1+i)/3)\cdot((1-i)/3)}} \begin{pmatrix} -2/3 \\ 1+i \\ (1-i)/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} \\ (3+3i)/2\sqrt{6} \\ (1-i)/2\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{u}_3 \coloneqq \frac{1}{\|\boldsymbol{u}_3'\|}\boldsymbol{u}_3' = \frac{1}{\sqrt{2^2 + (1-i)\cdot(1+i) + (-1-i)\cdot(-1+i)}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1+i \\ -1+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ (1+i)/2\sqrt{2} \\ (-1+i)/2\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

で与えられる． □

注意 (本問に関するお詫び)．本問の穴埋めに合わせようとすると，『$2\sqrt{6}$』や『$2\sqrt{2}$』をそれぞれ『$\sqrt{24}$』や『$\sqrt{8}$』というように少々気持ち悪い形で答えないといけないことになっていました．これは私が作問の段階で計算間違いをしてしまっていたことによります (本来こういうことは必要ない数にしたはずだったのですが失敗しました)．このせいで解答欄に合う数が出せないと考えた方がおられましたら大変申し訳ございません．

問題 1 補足解説． 第 6 回講義資料 p.5 に述べたグラム・シュミットの直交化法のアルゴリズムに従って計算すれば良い．エルミート内積では左側のベクトルの成分に複素共役を付けて計算しないといけないということを忘れないようにしよう．

ちなみに，グラムシュミットの直交化法は初めの $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ の順番を並べ替えて始めると計算結果が変わってしまう．問題文の但し書きは，「答えを 1 つに定めるために並べ替えをしないでください」という注意であった． □

問題 2

$$\boldsymbol{v}_1 \coloneqq \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_2 \coloneqq \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_3 \coloneqq \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_4 \coloneqq \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

とすると，$\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4\}$ は $\mathbb{R}^4$ の基底である．ここからグラム・シュミットの直交化法で得られる $\mathbb{R}^4$ の正規直交基底は

$$\left\{ \begin{pmatrix} \boxed{ア}/\sqrt{\boxed{イ}} \\ 0 \\ \boxed{ウ}/\sqrt{\boxed{エ}} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \boxed{オ}/\sqrt{\boxed{カ}} \\ \boxed{キ}/\sqrt{\boxed{ク}} \\ \boxed{ケ}/\sqrt{\boxed{コ}} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \boxed{サ}/\sqrt{\boxed{シ}} \\ \boxed{ス}/\sqrt{\boxed{セ}} \\ \boxed{ソ}/\sqrt{\boxed{タ}} \\ \boxed{チ}/\sqrt{\boxed{ツ}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \boxed{テ}/\sqrt{\boxed{ト}} \\ \boxed{ナ}/\sqrt{\boxed{ニ}} \\ \boxed{ヌ}/\sqrt{\boxed{ネ}} \\ \boxed{ノ}/\sqrt{\boxed{ハ}} \end{pmatrix} \right\}$$

である．ただし，ここでの $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$ を講義資料 p.5 のアルゴリズムの説明にあらわれる $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$ としてグラム・シュミットの直交化を行うこと．$\boxed{ア}$〜$\boxed{ハ}$に入る整数を求めよ．

問題 2 解答例. グラム・シュミットの直交化法のアルゴリズムに従って計算すれば良い．まず，

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1' &\coloneqq \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}\\
\boldsymbol{u}_2' &\coloneqq \boldsymbol{v}_2 - \frac{(\boldsymbol{u}_1' \cdot \boldsymbol{v}_2)}{(\boldsymbol{u}_1' \cdot \boldsymbol{u}_1')}\boldsymbol{u}_1' = \begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\end{pmatrix} - \frac{1\cdot 2 + 0\cdot 1 + 1\cdot 0 + 0\cdot 0}{1^2+0^2+1^2+0^2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\\0\end{pmatrix}\\
\boldsymbol{u}_3' &\coloneqq \boldsymbol{v}_3 - \frac{(\boldsymbol{u}_1' \cdot \boldsymbol{v}_3)}{(\boldsymbol{u}_1' \cdot \boldsymbol{u}_1')}\boldsymbol{u}_1' - \frac{(\boldsymbol{u}_2' \cdot \boldsymbol{v}_3)}{(\boldsymbol{u}_2' \cdot \boldsymbol{u}_2')}\boldsymbol{u}_2'\\
&= \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} - \frac{1\cdot 1 + 0\cdot 0 + 1\cdot 0 + 0\cdot 1}{1^2+0^2+1^2+0^2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} - \frac{1\cdot 1 + 1\cdot 0 + (-1)\cdot 0 + 0\cdot 1}{1^2+1^2+(-1)^2+0^2}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\0\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}1/6\\-1/3\\-1/6\\1\end{pmatrix}\\
\boldsymbol{u}_4' &\coloneqq \boldsymbol{v}_4 - \frac{(\boldsymbol{u}_1' \cdot \boldsymbol{v}_4)}{(\boldsymbol{u}_1' \cdot \boldsymbol{u}_1')}\boldsymbol{u}_1' - \frac{(\boldsymbol{u}_2' \cdot \boldsymbol{v}_4)}{(\boldsymbol{u}_2' \cdot \boldsymbol{u}_2')}\boldsymbol{u}_2' - \frac{(\boldsymbol{u}_3' \cdot \boldsymbol{v}_4)}{(\boldsymbol{u}_3' \cdot \boldsymbol{u}_3')}\boldsymbol{u}_3'\\
&= \begin{pmatrix}-1\\2\\3\\-1\end{pmatrix} - \frac{1\cdot(-1) + 0\cdot 2 + 1\cdot 3 + 0\cdot(-1)}{1^2+0^2+1^2+0^2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} - \frac{1\cdot(-1) + 1\cdot 2 + (-1)\cdot 3 + 0\cdot(-1)}{1^2+1^2+(-1)^2+0^2}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\0\end{pmatrix}\\
&\quad - \frac{(1/6)\cdot(-1) + (-1/3)\cdot 2 + (-1/6)\cdot 3 + 1\cdot(-1)}{(1/6)^2+(-1/3)^2+(-1/6)^2+1^2}\begin{pmatrix}1/6\\-1/3\\-1/6\\1\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}-1\\2\\1\\1\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

とし，$\boldsymbol{u}_1', \boldsymbol{u}_2', \boldsymbol{u}_3', \boldsymbol{u}_4'$ の大きさをそれぞれ 1 にすればよいので，求める正規直交基底 $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_4'\}$ は，

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &\coloneqq \frac{1}{\|\boldsymbol{u}_1'\|}\boldsymbol{u}_1' = \frac{1}{\sqrt{1^2+0^2+1^2+0^2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\0\\1/\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}\\
\boldsymbol{u}_2 &\coloneqq \frac{1}{\|\boldsymbol{u}_2'\|}\boldsymbol{u}_2' = \frac{1}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2+0^2}}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\\-1/\sqrt{3}\\0\end{pmatrix}\\
\boldsymbol{u}_3 &\coloneqq \frac{1}{\|\boldsymbol{u}_3'\|}\boldsymbol{u}_3' = \frac{1}{\sqrt{(1/6)^2+(-1/3)^2+(-1/6)^2+1^2}}\begin{pmatrix}1/6\\-1/3\\-1/6\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/\sqrt{42}\\-2/\sqrt{42}\\-1/\sqrt{42}\\6/\sqrt{42}\end{pmatrix}\\
\boldsymbol{u}_4 &\coloneqq \frac{1}{\|\boldsymbol{u}_4'\|}\boldsymbol{u}_4' = \frac{1}{\sqrt{(-1)^2+2^2+1^2+1^2}}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1/\sqrt{7}\\2/\sqrt{7}\\1/\sqrt{7}\\1/\sqrt{7}\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

で与えられる． □

問題 3

芝浦太郎君は以下のように考えた．この考えが正しいかどうかを判定せよ．
『$A^* = A$ を満たす複素数成分の行列 A の固有値を計算してみると，$1+i$ という値が出た．私はどこかで必ず計算間違いをしている．』

問題 3 解答例． 正しい． □

問題 3 補足解説． $A^* = A$ を満たす行列はエルミート行列と呼ばれるのであった (第 6 回講義資料定義 6.2)．定理 6.3(1) よりエルミート行列の固有値は必ず実数になるはずなので，実数でない固有値が出てしまった芝浦太郎君は必ずどこかで計算間違いをしているはずである． □

問題 4

芝浦太郎君は以下のように考えた．この考えが正しいかどうかを判定せよ．
『$A^* = A$ を満たす複素数成分の 2 次正方行列 A の固有ベクトルを計算してみると，固有ベクトルの一つとして $\begin{pmatrix} 2i \\ i \end{pmatrix}$ というものが取れるという結果が出た．私はどこかで必ず間違えている．』

問題 4 解答例． 間違い． □

問題 4 補足解説． 問題 3 補足解説で述べたようにエルミート行列の固有値は必ず実数になるが，固有ベクトルの成分に実数でない複素数が現れることはあり得る．実際，$\boldsymbol{v}$ が正方行列 A の固有値 λ の固有ベクトルであるとき，任意の $c \in \mathbb{C}$ に対して，

$$A(c\boldsymbol{v}) = c(A\boldsymbol{v}) = c(\lambda\boldsymbol{v}) = \lambda(c\boldsymbol{v})$$

となるので，$c\boldsymbol{v}$ も A の固有値 λ の固有ベクトルである．こうすると例えば A が固有値 1 の固有ベクトル $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ をもつとき，$\begin{pmatrix} 2i \\ i \end{pmatrix}$ も A の固有値 1 の固有ベクトルであるので，固有値の成分が実数であるからといって，固有ベクトルの成分が全て実数であるとは限らない．極端な例として，A が単位行列であれば，これはエルミート行列だが，全ての $\mathbb{C}^n$ の元は A の固有値 1 の固有ベクトルとなっている． □