線形代数 II 第 7 回本レポート課題解答例

担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)*

問題 1

次の実対称行列を実直交行列によって対角化せよ．ただし，計算過程も記述すること．

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

問題 1 解答例. A の固有多項式は，

$$\begin{aligned}
\Phi_A(t) &= \left|\begin{pmatrix} t & 0 & 0 & -1 \\ 0 & t & -1 & 0 \\ 0 & -1 & t & 0 \\ -1 & 0 & 0 & t \end{pmatrix}\right| \\
&= t\left|\begin{pmatrix} t & -1 & 0 \\ -1 & t & 0 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix}\right| - (-1)\left|\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ t & -1 & 0 \\ -1 & t & 0 \end{pmatrix}\right| \quad (\text{第 1 列に関して余因子展開}) \\
&= t(t^3 - t) + (-t^2 + 1) \\
&= (t^2 - 1)^2 = (t+1)^2(t-1)^2
\end{aligned}$$

となるので，A の固有値は -1(重複度 2), 1(重複度 2) である．

固有値 -1 に対する固有ベクトルを求める．x_1, x_2, x_3, x_4 に関する連立一次方程式

$$(-I_4 - A)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を解くと，

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (c_1, c_2 \text{は任意パラメータ})$$

となるので，固有値 -1 の固有ベクトルの組で一次独立なものの 1 つとして $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ が取

* *e-mail*：hoya@shibaura-it.ac.jp

れる．$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ を $\mathbb{R}^4$ の内積を用いてグラム・シュミットの直交化法により直交化する[*1]．まず，

$$\boldsymbol{u}_1' \coloneqq \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{u}_2' \coloneqq \boldsymbol{v}_2 - \frac{(\boldsymbol{u}_1' \cdot \boldsymbol{v}_2)}{(\boldsymbol{u}_1' \cdot \boldsymbol{u}_1')}\boldsymbol{u}_1' = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{(-1)\cdot 0 + 0 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0}{(-1)^2 + 0^2 + 0^2 + 1^2} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

とし，$\boldsymbol{u}_1', \boldsymbol{u}_2'$ の大きさをそれぞれ 1 にすればよく，

$$\boldsymbol{u}_1 \coloneqq \frac{1}{\sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 0^2 + 1^2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{u}_2 \coloneqq \frac{1}{\sqrt{0^2 + (-1)^2 + 1^2 + 0^2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

が取るべきベクトルの組であることがわかる．

次に，固有値 1 に対する固有ベクトルを求める．x_1, x_2, x_3, x_4 に関する連立一次方程式

$$(I_4 - A)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を解くと，

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (c_1, c_2 \text{は任意パラメータ})$$

となるので，固有値 1 の固有ベクトルの組で一次独立なものの 1 つとして $\boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ が取れる．

$\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$ を $\mathbb{R}^4$ の内積を用いてグラム・シュミットの直交化法により直交化する[*1]．まず，

$$\boldsymbol{u}_3' \coloneqq \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{u}_4' \coloneqq \boldsymbol{v}_4 - \frac{(\boldsymbol{u}_3' \cdot \boldsymbol{v}_4)}{(\boldsymbol{u}_3' \cdot \boldsymbol{u}_3')}\boldsymbol{u}_3' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0}{1^2 + 0^2 + 0^2 + 1^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

[*1] これらのベクトルについては見た瞬間既に直交していることがわかる人も多いと思うが，一応練習を兼ねて形式的にグラム・シュミットの直交化法を行う．解答ではここまで丁寧に書いていなくても良い．

とし，$\boldsymbol{u}'_3, \boldsymbol{u}'_4$ の大きさをそれぞれ 1 にすればよく，

$$\boldsymbol{u}_3 \coloneqq \frac{1}{\sqrt{1^2+0^2+0^2+1^2}}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\0\\0\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{u}_4 \coloneqq \frac{1}{\sqrt{0^2+1^2+1^2+0^2}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}$$

が取るべきベクトルの組であることがわかる．

以上より，

$$U \coloneqq (\boldsymbol{u}_1\ \boldsymbol{u}_2\ \boldsymbol{u}_3\ \boldsymbol{u}_4) = \begin{pmatrix}-1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} & 0\\ 0 & -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2}\\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} & 0\end{pmatrix}$$

とすると，U は直交行列で $U^{-1}AU = \begin{pmatrix}-1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ となる． □

問題 1 補足解説． 第 7 回講義資料に述べたアルゴリズムに従って計算すれば良い．この問題では固有値 1 の固有空間と固有値 -1 の固有空間からそれぞれ 2 つずつ，互いに直交する大きさが 1 のベクトルを選んでくることになるが，その方法はどちらも無限通りある．よって，A を対角化する実直交行列 U は上の解答例に書いたもの以外にも無限通りある．

興味のある方はこの問題を一般化して，n 次実対称行列

$$\begin{pmatrix}0 & 0 & \cdots & 0 & 1\\ 0 & & \iddots & 1 & 0\\ \vdots & \iddots & \iddots & \iddots & \vdots\\ 0 & 1 & \iddots & & 0\\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\end{pmatrix}$$

の対角化がどうなるかも考えてみて欲しい． □

問題 2

次のエルミート行列をユニタリ行列によって対角化せよ．<u>ただし，計算過程も記述すること．</u>

$$A \coloneqq \begin{pmatrix}2 & i & -1\\ -i & 2 & i\\ -1 & -i & 2\end{pmatrix}$$

問題 2 解答例． A の固有多項式は，

$$\begin{aligned}\Phi_A(t) &= \left|\begin{pmatrix}t-2 & -i & 1\\ i & t-2 & -i\\ 1 & i & t-2\end{pmatrix}\right|\\ &= (t-2)^3 + (-i)^2\cdot 1 + 1\cdot i^2 - (t-2)\cdot(-i)\cdot i - (-i)\cdot i\cdot(t-2) - 1\cdot(t-2)\cdot 1\\ &= t^3 - 6t + 9t - 4 = (t-1)^2(t-4)\end{aligned}$$

となるので，A の固有値は 1(重複度 2), 4 である．

固有値 1 に対する固有ベクトルを求める．x_1, x_2, x_3 に関する連立一次方程式

$$(I_3 - A)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -i & 1 \\ i & -1 & -i \\ 1 & i & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を解くと，

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (c_1, c_2 \text{は任意パラメータ})$$

となるので，固有値 -1 の固有ベクトルの組で一次独立なものの 1 つとして，$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ が取れる．$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ を $\mathbb{C}^3$ のエルミート内積を用いてグラム・シュミットの直交化法により直交化する．まず，

$$\boldsymbol{u}_1' \coloneqq \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{u}_2' \coloneqq \boldsymbol{v}_2 - \frac{(\boldsymbol{u}_1' \cdot \boldsymbol{v}_2)}{(\boldsymbol{u}_1' \cdot \boldsymbol{u}_1')}\boldsymbol{u}_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{i \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1}{i \cdot (-i) + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0}\begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -i/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とし，$\boldsymbol{u}_1', \boldsymbol{u}_2'$ のエルミート内積に関する大きさをそれぞれ 1 にすればよく，

$$\boldsymbol{u}_1 \coloneqq \frac{1}{\sqrt{i \cdot (-i) + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0}}\begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{u}_2 \coloneqq \frac{1}{\sqrt{(1/2) \cdot (1/2) + (i/2) \cdot (-i/2) + 1 \cdot 1}}\begin{pmatrix} 1/2 \\ -i/2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ -i/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

が取るべきベクトルの組であることがわかる．

次に固有値 4 に対する固有ベクトルを求める．x_1, x_2, x_3 に関する連立一次方程式

$$(4I_3 - A)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -i & 1 \\ i & 2 & -i \\ 1 & i & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を解くと，

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} -1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix} \quad (c \text{ は任意パラメータ})$$

となるので，固有値 2 に対する固有ベクトルの 1 つとして，$\begin{pmatrix} -1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}$ が取れる．これに対して，グラム・シュミットの直交化法を適用するというのはエルミート内積に関する大きさを 1 にするということになるので，

$$\boldsymbol{u}_3 \coloneqq \frac{1}{\sqrt{(-1) \cdot (-1) + (-i) \cdot i + 1 \cdot 1}}\begin{pmatrix} -1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{3} \\ i/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

が取るべきベクトルであることがわかる．以上より，

$$U \coloneqq (\boldsymbol{u}_1\ \boldsymbol{u}_2\ \boldsymbol{u}_3) = \begin{pmatrix} -i/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -i/\sqrt{6} & i/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

とすると，U はユニタリ行列で $U^{-1}AU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ となる． □

問題 2 補足解説. 問題 1 と同様である．A を対角化するユニタリ行列 U の取り方が無限通りあることも同様である．内積の計算でエルミート内積を使うということだけ忘れないようにしよう． $\square$