線形代数 II 第 8 回本レポート課題解答例

担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)*

問題 1

$\mathbb{R}^2$ における 2 次曲線
$$4x^2 + axy + y^2 = 1$$
の概形が双曲線となる a の範囲を求めよ．

問題 1 解答例.
$$A = \begin{pmatrix} 4 & a/2 \\ a/2 & 1 \end{pmatrix}$$
とすると，
$$4x^2 + axy + y^2 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{$*$}$$
である．ここで，$4x^2 + axy + y^2 = 1$ が双曲線となることと，2 次形式 $(*)$ の符号数が $(1, 1, 0)$ となることが同値で，さらにそれは $\det(A) < 0$ となることと同値なので，求める a の範囲は，
$$\det(A) = 4 \cdot 1 - (a/2)^2 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad a > 4 \text{ または } a < -4.$$
□

問題 1 補足解説. 第 8 回講義資料の定理 8.3 および p.10 下部の同値関係を用いれば良い．GeoGebra(`https://www.geogebra.org`) などを用いて，a を変えていったときにどのように曲線が変わるかを見てみると面白いだろう． □

問題 2

2 次形式
$$-x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + ax_2x_3$$
が退化する a を<u>全て</u>求めよ．なお，採点は手動で行うので書き方については特に指定しない．

問題 2 解答例.
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & a/2 \\ 1/2 & a/2 & 1 \end{pmatrix}$$
とすると，
$$-x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + ax_2x_3 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

* *e-mail*：`hoya@shibaura-it.ac.jp`

である．この 2 次形式が退化することと，$\det(A)=0$ となることは同値なので，$\det(A)=0$ となる a を求めれば良い．

$$\left|\begin{pmatrix} -1 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & a/2 \\ 1/2 & a/2 & 1 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 0 & (2a+1)/2 & 5/2 \\ 0 & (-a+2)/2 & (a-2)/2 \\ 1/2 & a/2 & 1 \end{pmatrix}\right| \text{ (第 3 行の 2 倍，-1 倍をそれぞれ第 1 行，第 2 行に加えた)}$$
$$= \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix} (2a+1)/2 & 5/2 \\ (-a+2)/2 & (a-2)/2 \end{pmatrix}\right| \text{ (第 1 行に関して余因子展開)}$$
$$= \frac{1}{8}((2a+1)\cdot(a-2) - 5\cdot(-a+2))$$
$$= \frac{1}{4}(a+3)(a-2)$$

より，求める a は $-3, 2$ である． □

問題 2 補足解説. 第 8 回講義資料命題 8.4 (1) を用いれば良い．退化の定義については定義 8.5 を参照のこと．
□

問題 3

2 次形式
$$x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$$
の符号数は ($\boxed{ア}$,$\boxed{イ}$,$\boxed{ウ}$) である．$\boxed{ア}$，$\boxed{イ}$，$\boxed{ウ}$に入る数字を順に半角数字でコンマで区切って入力せよ．

問題 3 解答例.
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$
とすると，
$$x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$
である．このとき，A の重複度込みの固有値を考え，その中で正のものの数，負のものの数，0 の数を順に並べたものが符号数なので，まず A の固有値を求める．A の固有多項式は，

$$\Phi_A(t)$$
$$= \left|\begin{pmatrix} t-1 & 2 & -1 \\ 2 & t-1 & -1 \\ -1 & -1 & t+2 \end{pmatrix}\right|$$
$$= (t-1)^2(t+2) + 2\cdot(-1)\cdot(-1) + (-1)\cdot 2\cdot(-1) - (t-1)\cdot(-1)\cdot(-1) - 2\cdot 2\cdot(t+2) - (-1)\cdot(t-1)\cdot(-1)$$
$$= t(t+3)(t-3)$$

となるので，A の固有値は $0, -3, 3$．よって，A の固有値は正のものが 1 つ，負のものが 1 つ，0 が 1 つなので，求める符号数は $(1,1,1)$ である． □

問題 3 別解. (2 次形式を実対称行列 A を使って書くところまでは同じ．)

まず，A の行列式の値を計算すると，

$$\det(A) = \left|\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\right| \text{ (第 1 行に第 2 行，第 3 行を加えた)}$$
$$= 0$$

となるので，A の 3 つの固有値の積は 0 である．次に，A のトレースを計算すると，

$$\mathrm{Tr}(A) = 1 + 1 + (-2) = 0$$

となるので，A の 3 つの固有値の和も 0 である．ここで，3 つの実数に対して，積も和も 0 となるのは，

- 正の値が 1 つ，負の値が 1 つ，0 が 1 つ
- 3 つとも 0

のいずれかの場合である．いま，A が重複度 3 で固有値 0 を持ったとすると，A は零行列となってしまうのでこれは矛盾．よって，A は正の実数を 1 つ，負の実数を 1 つ，0 を 1 つ固有値として持つ．よって，求める符号数は $(1,1,1)$. □

問題 3 補足解説. 符号数の定義 (第 8 回講義資料 p.9 下部) より，2 次形式をに対応する実対称行列の重複度込みの固有値の符号を調べれば良い．解答例での計算より，問題 3 の 2 次形式の標準形は，

$$3(x_1')^2 - 3(x_2')^2$$

となる．この表示を与える $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ から $\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}$ への具体的な変換を求めるためには，A を対角化する実直交行列を求めればよいが，それは

$$U = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

である (このとき ${}^tUAU = U^{-1}AU = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$)．つまり，

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = {}^tU \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-x_1 + x_2)/\sqrt{2} \\ (-x_1 - x_2 + 2x_3)/\sqrt{6} \\ (x_1 + x_2 + x_3)/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

と変換すれば良い (第 8 解講義資料定理 8.2)．なお，ここでは U の具体的な計算手順は省いたが，力試しとして各自計算を試みて欲しい． □

問題 3 別解補足解説. 別解は具体的な A の固有値は求めずに，A のトレースと行列式の値からその固有値の符号だけを調べるという方法である．ここでは以下の命題を用いている．

命題

A を対角化可能な n 次正方行列をしたとき，A の行列式 $\det(A)$ は A の重複度込みの固有値の積であり，A のトレース $\mathrm{Tr}(A)$ は A の重複度込みの固有値の和である．

命題の証明. A は対角化可能なので，ある n 次正則行列 P が存在して，

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

と書ける．このとき，$\lambda_1, \dots, \lambda_n$ は重複度込みの A の固有値であったことに注意する．これより，

$$\det(A) = \det(P)^{-1}\det(A)\det(P) = \det(P^{-1}AP) = \left|\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}\right| = \lambda_1 \cdots \lambda_n,$$

$$\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(PP^{-1}A) = \mathrm{Tr}(P^{-1}AP) = \mathrm{Tr}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$$

となる． □

この命題の証明中では，以下の行列式とトレースの性質を使ったことに注意しよう．

> 任意の n 次正方行列 A, B に対し，
>
> $$\det(AB) = \det(A)\det(B).\ \text{特に，}A\text{ が正則のとき}\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}.$$
> $$\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA).$$

行列式の性質については線形代数 I の内容を，トレースの性質については第 5 回講義資料 p.4 注意 1 を参照のこと．

さて，この命題を使って問題 3 では符号数を割り出すことができたが，3 次以上の行列については「行列式とトレースだけ調べれば良い」と言うのはいつでも正しいわけではない．例えば，$\det(A) = 0, \mathrm{Tr}(A) > 0$ となってしまった場合，3 つの固有値は，積をとると 0，和をとると正ということがわかるが，ここからは符号数は $(1,1,1), (2,0,1), (1,0,2)$ であるということ以上は絞れない (例えば，固有値が $2, -1, 0$ だった場合 1 つめで，$2, 1, 0$ だった場合 2 つめで，$1, 0, 0$ となった場合 3 つめとなる)．このため，3 次以上の場合は，固有値をきちんと求めて解くというのが安全策である．一方，2 次の行列の場合には，2 つの固有値の積と和の情報だけでその符号が完全にわかるというのは第 8 回講義資料 p.10 下部で見たとおりである．この場合には非常に有効な手法である． □

問題 4

> 2 変数関数
>
> $$f(x,y) = \sin x + \sin y + \cos(x+y)$$
>
> は $(x,y) = \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right)$ で極大値をとるか，極小値をとるか，そのどちらでもないかを判定せよ．

問題 4 解答例．

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \cos x - \sin(x+y) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \cos y - \sin(x+y) \end{cases}$$

より，点 $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right)$ においては，

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right) = 0$$

が成立する．次にヘッセ行列 $H(x,y)$ を計算してみると，

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin x - \cos(x+y) & -\cos(x+y) \\ -\cos(x+y) & -\sin y - \cos(x+y) \end{pmatrix}$$

となるので，

$$H\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right) = \begin{pmatrix} -1 & -1/2 \\ -1/2 & -1 \end{pmatrix}$$

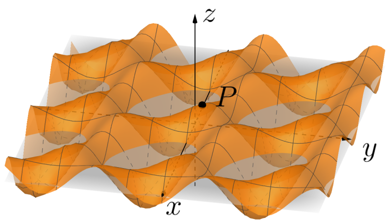
である．これより，

$$\det(H\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right)) = (-1)\cdot(-1) - (-1/2)^2 = 3/4 > 0, \qquad \mathrm{Tr}(H\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right)) = -1-1 = -2 < 0$$

となるので，$f(x,y)$ は点 $\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right)$ で極大値 $\frac{3}{2}$ をとることがわかる． □

問題 4 補足解説． 今回の 2 次形式の理論はこのように多変数関数の極値問題に応用ができる．原理の解説については第 8 回講義資料の p.11 以降の『微積分学との関係』を参照すること．

なお，$z = f(x,y) = \sin x + \sin y + \cos(x+y)$ のグラフは以下のようになっており，その中で点 $P : \left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6},\frac{3}{2}\right)$ は以下のように見える．



関数 $f(x,y)$ は $f(x+2n\pi, y+2m\pi) = f(x,y), n, m \in \mathbb{Z}$ という周期性を持つので，グラフも周期的である．是非他の極値も第 8 回講義資料の p.11 以降に解説した方法 (例 5 が参考になる) に従って，求めてみてもらいたい． □