線形代数 II 第 8 回本レポート課題解答例

担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)*

問題 1

$\mathbb{R}$ の元を成分とする n 次正方行列全体のなす集合を $\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ とし，$\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ を通常の行列の和とスカラー倍によって，$\mathbb{R}$ 上のベクトル空間とみなす (第 9 回講義資料例 3 参照)．このとき，$\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ の以下の部分集合がそれぞれ $\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ の部分空間であるかどうかを判定し，その理由を述べよ．(難しい場合には $n=3$ として解答しても良い．ただし，その場合 -2 点とする.)

(1) $W_1 \coloneqq \{A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R}) \mid \mathrm{Tr}(A) = 0\}$.
(2) $W_2 \coloneqq \{A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R}) \mid \mathrm{Tr}(A) \geq 0\}$.
(3) $W_3 \coloneqq \{A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R}) \mid \det(A) = 0\}$.

ただし，$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ に対し，

$$\mathrm{Tr}(A) \coloneqq a_{11} + a_{22} + \cdots a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \text{ (対角成分の和)}$$

である (第 3 回講義資料 p.5 注意 1).

問題 1 解答例.

(1) W_1 は $\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ の部分空間である．
理由：O を零行列とすると，$\mathrm{Tr}(O) = 0$ なので，$O \in W_1$ である．
次に，任意の 2 元 $A, B \in W_1$ をとると，

$$\mathrm{Tr}(A+B) = \mathrm{Tr}(A) + \mathrm{Tr}(B) = 0 + 0 = 0.$$

よって，$A + B \in W_1$ である．
さらに，任意の $c \in \mathbb{R}$，$A \in W_1$ に対し，

$$\mathrm{Tr}(cA) = c\,\mathrm{Tr}(A) = c \cdot 0 = 0.$$

よって，$cA \in W_1$ である．
以上より，W_1 は $\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ の部分空間である． □

(2) W_2 は $\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ の部分空間ではない．
理由：

$$\mathrm{Tr}(I_n) = \underbrace{1 + \cdots + 1}_{n \text{ 個}} = n > 0$$

なので，$I_n \in W_2$ である．一方，

$$\mathrm{Tr}((-1)\cdot I_n) = \underbrace{(-1) + \cdots + (-1)}_{n \text{ 個}} = -n < 0$$

* *e-mail*：hoya@shibaura-it.ac.jp

より，$(-1)\cdot I_n \notin W_2$．よって，W_2 はスカラー倍で閉じておらず，W_2 は $\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ の部分空間ではない．

□

(3) W_3 は $\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ の部分空間ではない．

理由：

$$A_1 := \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & I_{n-1} & \\ 0 & & & \end{array}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 := \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \text{\huge 0} & \\ 0 & & & \end{array}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

とすると，$\det(A_1) = \det(A_2) = 0$ より，$A_1, A_2 \in W_3$．いま，

$$A_1 + A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_n$$

より，$\det(A_1 + A_2) = \det(I_n) = 1 \neq 0$．よって，$A_1 + A_2 \notin W_3$．よって，$W_3$ は和で閉じておらず，W_3 は $\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ の部分空間ではない．

□

問題 1 補足解説. 部分空間であるかどうかを確かめるためには，定義 9.3 の (s1)，(s2)，(s3) を全て満たすかどうかをチェックすれば良い．W_2 は (s1)，(s2) を満たすが，(s3) を満たさず，W_3 は (s1)，(s3) を満たすが，(s2) を満たさない部分集合となっている．また，トレースの以下の性質も合わせて思い出しておこう．いずれも定義から容易にチェックできる．

任意の n 次正方行列 A, B と $c \in \mathbb{K}$ に対し，

(1) $\mathrm{Tr}(A+B) = \mathrm{Tr}(A) + \mathrm{Tr}(B)$.

(2) $\mathrm{Tr}(cA) = c\,\mathrm{Tr}(A)$.

(3) $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.

□

問題 2

$\mathbb{C}$ の元を係数とする 1 変数多項式全体のなす集合を $\mathbb{C}[x]$ とし，$\mathbb{C}[x]$ を通常の多項式の和とスカラー倍により，$\mathbb{C}$ 上のベクトル空間とみなす (第 9 回講義資料例 2 参照)．このとき，$\mathbb{C}[x]$ の以下の部分集合がそれぞれ $\mathbb{C}[x]$ の部分空間であるかどうかを判定し，その理由を述べよ．

(1) $W_1 := \{f(x) \in \mathbb{C}[x] \mid f(0) = 0 \text{ かつ } f(2) = 0\}$.

(2) $W_2 := \{f(x) \in \mathbb{C}[x] \mid f(0) = 0 \text{ または } f(2) = 0\}$.

問題 2 解答例.

(1) W_1 は $\mathbb{C}[x]$ の部分空間である．

理由：0 を定数関数とすると，0 での値も 2 での値も 0 なので，$0 \in W_1$ である．

次に，任意の 2 元 $f(x), g(x) \in W_1$ をとると，

$$f(0) + g(0) = 0 + 0 = 0 \quad \text{かつ} \quad f(2) + g(2) = 0$$

となるので，$f(x) + g(x) \in W_1$ である．

さらに，任意の $c \in \mathbb{C}$，$f(x) \in W_1$ に対し，

$$cf(0) = c \cdot 0 = 0 \quad \text{かつ} \quad cf(2) = c \cdot 0 = 0$$

となるので，$cf(x) \in W_1$ である．

以上より，W_1 は $\mathbb{C}[x]$ の部分空間である． $\square$

(2) W_2 は $\mathbb{C}[x]$ の部分空間ではない．

理由：

$$f(x) = x \quad g(x) = 2 - x$$

とすると，$f(0) = 0, g(2) = 0$ より，$f(x), g(x) \in W_2$ である．一方，

$$f(0) + g(0) = 0 + (2 - 0) = 2 \neq 0 \quad f(2) + g(2) = 2 + (2 - 2) = 2 \neq 0$$

より，$f(x) + g(x) \notin W_2$．よって，W_2 は和で閉じておらず，W_2 は $\mathbb{C}[x]$ の部分空間ではない． $\square$

問題 2 補足解説． 問題 1 と同様，部分空間であるかどうかを確かめるためには，定義 9.3 の (s1)，(s2)，(s3) を全て満たすかどうかをチェックすれば良い．W_2 は (s1)，(s3) を満たすが，(s2) を満たさない部分集合となっている．なお，

$$U_1 \coloneqq \{f(x) \in \mathbb{C}[x] \mid f(0) = 0\} \quad U_2 \coloneqq \{f(x) \in \mathbb{C}[x] \mid f(2) = 0\}$$

とおくと，これらはそれぞれ $\mathbb{C}[x]$ の部分空間である．(証明方法は問題 2 (1) とほぼ同じである．確認してみよ．) さらに，

$$W_1 = U_1 \cap U_2 \quad W_2 = U_1 \cup U_2$$

となる．よって，命題 9.5 より，W_1 も $\mathbb{C}[x]$ の部分空間となっている．W_2 は部分空間の和集合が一般には部分空間にはならないことの例を与えている． $\square$