線形代数 II 第 10 回本レポート課題解答例

担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)*

問題 1

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1&2&1&1\\2&3&2&3&4&3&2\\1&2&1&2&2&2&1\\-1&-1&-1&0&0&2&1\end{pmatrix}$$

とする．このとき，$\mathbb{C}^7$ の部分空間

$$W_A := \{\boldsymbol{x}\in\mathbb{C}^7 \mid A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\}$$

の次元 $\dim_{\mathbb{C}} W_A$ は $\boxed{ア}$ である．$\boxed{ア}$ に入る数字を半角数字で入力せよ．

問題 1 解答例． $\dim_{\mathbb{C}} W_A = 7-\mathrm{rank}\,A$ なので，$\mathrm{rank}\,A$ を求めれば良い．A を行基本変形を用いて階段行列にする．

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1&2&1&1\\2&3&2&3&4&3&2\\1&2&1&2&2&2&1\\-1&-1&-1&0&0&2&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{それぞれ第 2,3,4 行に加える}]{\text{第 1 行の}-2\text{ 倍},-1\text{ 倍},1\text{ 倍を}}\begin{pmatrix}1&1&1&1&2&1&1\\0&1&0&1&0&1&0\\0&1&0&1&0&1&0\\0&0&0&1&2&3&2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第 2 行の}-1\text{ 倍を第 3 行に加える}}\begin{pmatrix}1&1&1&1&2&1&1\\0&1&0&1&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&2&3&2\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{第 3 行と第 4 行を入れ替える}}\begin{pmatrix}1&1&1&1&2&1&1\\0&1&0&1&0&1&0\\0&0&0&1&2&3&2\\0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

これより，$\mathrm{rank}\,A=3$ なので，$\dim_{\mathbb{C}} W_A = 7-3=4$. □

問題 1 補足解説． 定理 10.10 の最後の等式を用いればよい．なお，実際に W_A の基底を求めるためには，以下のようにすればよい．A を引き続き行基本変形して簡約階段行列にする：

$$\begin{pmatrix}1&0&1&0&2&0&1\\0&1&0&0&-2&-2&-2\\0&0&0&1&2&3&2\\0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

これより，

$$\boldsymbol{p}_3:=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{p}_5:=\begin{pmatrix}-2\\2\\0\\-2\\1\\0\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{p}_6:=\begin{pmatrix}0\\2\\0\\-3\\0\\1\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{p}_7:=\begin{pmatrix}-1\\2\\0\\-2\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

とおくと，$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ の一般の解は

$$\boldsymbol{x}=c_3\boldsymbol{p}_3+c_5\boldsymbol{p}_5+c_6\boldsymbol{p}_6+c_7\boldsymbol{p}_7 \quad (c_3,c_5,c_6,c_7\in\mathbb{K})$$

* *e-mail*：hoya@shibaura-it.ac.jp

と書け (ここの添え字の付け方は定理 10.10 のものに合わせている．定理 10.10 の記号で $k_0 = 0, k_1 = 1, k_2 = 2, k_3 = 4, k_4 = 8$ である．)，W_A の基底の 1 つは，

$$\{\boldsymbol{p}_3, \boldsymbol{p}_5, \boldsymbol{p}_6, \boldsymbol{p}_7\}$$

で与えられる． □

問題 2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 7 & 5 \\ -1 & 0 & -3 & 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

とする．このとき，$\mathbb{C}^6$ の部分空間

$$W_A := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^6 \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$$

の基底の 1 つとして，

$$\left\{ \begin{pmatrix} \boxed{ア} \\ \boxed{イ} \\ 1 \\ \boxed{ウ} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \boxed{エ} \\ \boxed{オ} \\ 0 \\ \boxed{カ} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \boxed{キ} \\ \boxed{ク} \\ 0 \\ \boxed{ケ} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

が取れる．$\boxed{ア}$〜$\boxed{ケ}$に入る<u>整数</u>を順に半角数字でコンマ『,』で区切って入力せよ．マイナス記号を入力したい場合は半角のハイフン『-』を用いること．なお，$\boxed{ア}$〜$\boxed{ケ}$に入るのは整数なので，2 桁以上の数や負の数，0 もあり得ることに注意せよ．

問題 2 解答例． まず，A を行基本変形を用いて簡約階段行列にする．

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 7 & 5 \\ -1 & 0 & -3 & 1 & 4 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{それぞれ第 2,4 行に加える}]{\text{第 1 行の} -1 \text{ 倍},1 \text{ 倍を}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 行に加える}]{\text{第 2 行の} -1 \text{ 倍を}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{それぞれ第 2,4 行に加える}]{\text{第 3 行の} -1 \text{ 倍を}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

これより，

$$\boldsymbol{p}_3 := \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{p}_5 := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{p}_6 := \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とおくと，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の一般の解は

$$\boldsymbol{x} = c_3\boldsymbol{p}_3 + c_5\boldsymbol{p}_5 + c_6\boldsymbol{p}_6 \quad (c_3, c_5, c_6 \in \mathbb{K})$$

と書け，W_A の基底の 1 つは，

$$\{\boldsymbol{p}_3, \boldsymbol{p}_5, \boldsymbol{p}_6\}$$

で与えられる．($\boxed{ア} = -3, \boxed{イ} = 2, \boxed{ウ} = 0, \boxed{エ} = 1, \boxed{オ} = -1, \boxed{カ} = -3, \boxed{キ} = 2, \boxed{ク} = -1, \boxed{ケ} = -2$) □

問題 2 補足解説． 定理 10.10 の方針に従って，基底を求めれば良い．行基本変形を用いて係数行列を簡約階段行列に変形する方法で連立一次方程式を解けば，W_A の基底は自動的に得られるのである．(ここの添え字の付け方は定理 10.10 のものに合わせている．定理 10.10 の記号で $k_0, k_1 = 1, k_2 = 2, k_3 = 4, k_4 = 7$ である．) □

問題 3

$\mathbb{C}$ 上のベクトル空間 $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{C})$ の部分集合

$$\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}-3 & 5\\ -2 & 8\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}3 & 4\\ 1 & 2\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right\}$$

に関する文章として，正しいものを選択せよ．

(1) $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{C})$ の基底である．
(2) 一次従属であるが，$\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{C})$ を生成する．
(3) 一次独立だが，$\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{C})$ を生成はしない．
(4) 一次従属であり，$\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{C})$ を生成もしない．

問題 3 解答例． ある $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{K}$ が存在して，

$$c_1\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}-3 & 5\\ -2 & 8\end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix}3 & 4\\ 1 & 2\end{pmatrix} + c_4\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} \tag{$*$}$$

となったと仮定する．左辺は

$$\begin{pmatrix}c_1 - 3c_2 + 3c_3 + 2c_4 & 5c_2 + 4c_3 + c_4\\ c_1 - 2c_2 + c_3 + c_4 & c_1 + 8c_2 + 2c_3\end{pmatrix}$$

となるので，

$$(*) \iff \begin{cases}c_1 - 3c_2 + 3c_3 + 2c_4 = 0\\ 5c_2 + 4c_3 + c_4 = 0\\ c_1 - 2c_2 + c_3 + c_4 = 0\\ c_1 + 8c_2 + 2c_3 = 0\end{cases} \iff \begin{pmatrix}1 & -3 & 3 & 2\\ 0 & 5 & 4 & 1\\ 1 & -2 & 1 & 1\\ 1 & 8 & 2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\\ c_3\\ c_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

である．ここで，最後の連立一次方程式の係数行列を簡約化すると

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 2/7\\ 0 & 1 & 0 & -1/7\\ 0 & 0 & 1 & 3/7\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

となる．よって，

$$(*) \iff \begin{cases}c_1 + \frac{2}{7}c_4 = 0\\ c_2 - \frac{1}{7}c_4 = 0\\ c_3 + \frac{3}{7}c_4 = 0\end{cases}$$

となるので，例えば $c_1 = -2, c_2 = 1, c_3 = -3, c_4 = 7$ とすると，$(*)$ は成立する．よって，与えられた部分集合は一次従属である．

ここで，$\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{C}) = 4$ であることより，もしも与えられた 4 つの元からなる部分集合が $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{C})$ を生成していたとすると，それは自動的に一次独立でもあるはずである．しかし，いまこの部分集合は一次従属であることがわかっているので，これは $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{C})$ を生成しない．よって，(4). □

問題 3 補足解説． 一次従属性の証明は定義通りである．一次従属性を示した後は定理 10.9 (1) を用いて証明した． □

問題 4

以下の文の正誤を判定せよ．
『V を $\mathbb{R}$ 上の有限次元ベクトル空間，W を V の部分空間とする．このとき，$\dim_{\mathbb{R}} V = \dim_{\mathbb{R}} W$ が成立するなら，必ず $W = V$ である．』

問題 4 解答例． 正しい． □

問題 4 補足解説． $n = \dim_{\mathbb{R}} W$ とし，$B = \{\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_n\}$ を$\underline{W\text{ の}}$基底とする．いま，W は V の部分空間なので，B は$\underline{V\text{ の}}$一次独立な部分集合でもある．ここで仮定より，$n = \dim_{\mathbb{R}} V$ なので，定理 10.9 (2) より n 個の元からなる一次独立な V の部分集合は自動的に V の基底となる．よって，基底の定義 10.4 の条件 (b2) より，

$$W = \operatorname{span}_{\mathbb{R}} B = V$$

となる．

ここで示した性質は便利なことがあるので覚えておいて良いだろう．もちろん $\mathbb{R}$ 上ではなく $\mathbb{C}$ 上でも全く同じことが成立する．

なお，問題文で『有限次元』という条件が入っていることに注意しておこう．無限次元を許すとこの性質は一般には成り立たない．例えば，1 変数多項式全体のなすベクトル空間 $\mathbb{K}[x]$ において，

$$\mathbb{K}[x]_{\geq 1} \coloneqq \{f(x) \in \mathbb{K}[x] \mid f(0) = 0\}$$

という部分集合を考えると，これは定数項が 0 の多項式全体のなす部分集合であり，$\mathbb{K}[x]$ の部分空間となる (確認せよ)．さらに，この部分空間は

$$\{x^n \mid n \in \mathbb{Z}_{>0}\} = \{x, x^2, x^3, \dots\}$$

という無限個の元からなる基底を持つので，$\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[x]_{\geq 1} = \infty$ である (第 10 回講義資料例 5 と同じように確認できる)．よって，これは

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[x] = \infty = \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[x]_{\geq 1} \text{であるが，} \mathbb{K}[x]_{\geq 1} \subsetneqq \mathbb{K}[x]$$

という例を与えている． $\square$