線形代数 II 第 11 回本レポート課題解答例

担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)*

問題 1

以下の$\mathbb{C}$上のベクトル空間の間の写像が線形写像であるかどうかを判定し，その判定の理由を述べよ．また，線形写像である場合，全射性，単射性の判定も行い (例えば『全射であるが単射ではない』等)，その判定の理由を述べよ．

(1) $f_1 \colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}[x],\ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \mapsto (a+b+c)+(b+c)x^3+ax^5.$

(2) $f_2 \colon \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}^3,\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a+2b+3c+4d \\ a+b+3c+3d \\ -b+c+d \end{pmatrix}.$

(3) $f_3 \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z = x+iy \mapsto \overline{z} = x-iy\ (x, y \in \mathbb{R}).$

(4) $f_4 \colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C},\ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mapsto \begin{cases} a & a \neq 0 \text{ のとき}, \\ b & a = 0 \text{ のとき}. \end{cases}$

問題 1 解答例.

(1) 単射でも全射でもない線形写像である．

線形写像であること：任意の $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3, \alpha \in \mathbb{C}$ に対し，

$$
\begin{aligned}
f_1\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}\right) &= f_1\left(\begin{pmatrix} a+a' \\ b+b' \\ c+c' \end{pmatrix}\right) \\
&= ((a+a')+(b+b')+(c+c'))+((b+b')+(c+c'))x^3+(a+a')x^5 \\
&= (a+b+c)+(b+c)x^3+ax^5+(a'+b'+c')+(b'+c')x^3+a'x^5 \\
&= f_1\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right) + f_1\left(\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}\right),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_1\left(\alpha \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right) = f_1\left(\begin{pmatrix} \alpha a \\ \alpha b \\ \alpha c \end{pmatrix}\right) &= (\alpha a+\alpha b+\alpha c)+(\alpha b+\alpha c)x^3+\alpha a x^5 \\
&= \alpha((a+b+c)+(b+c)x^3+ax^5) \\
&= \alpha f_1\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right)
\end{aligned}
$$

となるので，f_1 は線形写像である．

* *e-mail*：hoya@shibaura-it.ac.jp

単射でないこと：$\operatorname{Ker} f_1 \neq \{\mathbf{0}\}$ であることを示せばよい．

$$f_1\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right) = (a+b+c) + (b+c)x^3 + ax^5 = 0$$

とすると，

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ b+c=0 \\ a=0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a=0 \\ b+c=0 \end{cases}$$

なので，例えば $a=0, b=1, c=-1$ とすると，

$$f_1\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = (0+1+(-1)) + (1+(-1))x^3 + 0x^5 = 0$$

となる．よって，$\operatorname{Ker} f_1 \neq \{\mathbf{0}\}$ である．

全射でないこと：$\operatorname{Im} f_1 \subsetneqq \mathbb{C}[x]$ であることを示せばよい．定義より，

$$\operatorname{Im} f_1 = \{(a+b+c) + (b+c)x^3 + ax^5 \mid a, b, c \in \mathbb{C}\}$$

であるので，$x^2 \notin \operatorname{Im} f_1$ である．よって，$\operatorname{Im} f_1 \subsetneqq \mathbb{C}[x]$ となる． □

(2) 単射ではないが，全射の線形写像である．

線形写像であること：任意の $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{C}), \alpha \in \mathbb{C}$ に対し，

$$\begin{aligned} f_2\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}\right) &= f_2\left(\begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{pmatrix}\right) \\ &= \begin{pmatrix} (a+a') + 2(b+b') + 3(c+c') + 4(d+d') \\ (a+a') + (b+b') + 3(c+c') + 3(d+d') \\ -(b+b') + (c+c') + (d+d') \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a+2b+3c+4d \\ a+b+3c+3d \\ -b+c+d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a'+2b'+3c'+4d' \\ a'+b'+3c'+3d' \\ -b'+c'+d' \end{pmatrix} \\ &= f_2\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) + f_2\left(\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_2\left(\alpha\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = f_2\left(\begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} \alpha a + 2\alpha b + 3\alpha c + 4\alpha d \\ \alpha a + \alpha b + 3\alpha c + 3\alpha d \\ -\alpha b + \alpha c + \alpha d \end{pmatrix} \\ &= \alpha\begin{pmatrix} a+2b+3c+4d \\ a+b+3c+3d \\ -b+c+d \end{pmatrix} \\ &= \alpha f_2\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

となるので，f_2 は線形写像である．

単射でないこと：$\operatorname{Ker} f_2 \neq \left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$ であることを示せばよい．

$$f_2\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a+2b+3c+4d \\ a+b+3c+3d \\ -b+c+d \end{pmatrix} = 0$$

とすると，

$$\begin{cases} a+2b+3c+4d=0 \\ a+b+3c+3d=0 \\ -b+c+d=0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (*)$$

である．ここで，$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ を行基本変形で簡約化すると，

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

となるので，連立一次方程式 $(*)$ の解は

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (t \text{ は複素数})$$

という形で書けるもので全てである．よって，

$$\operatorname{Ker} f_2 = \left\{ t \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{C} \right\} \neq \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

となる．

<u>全射であること：</u>$\operatorname{Im} f_2 = \mathbb{C}^3$ であることを示せばよい．つまり，任意の $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$ に対し，

$$f_2\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a + 2b + 3c + 4d \\ a + b + 3c + 3d \\ -b + c + d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

を満たす $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ が取れることを示せば良い．連立一次方程式

$$\begin{cases} a + 2b + 3c + 4d = \alpha \\ a + b + 3c + 3d = \beta \\ -b + c + d = \gamma \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \qquad (**)$$

の拡大係数行列 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \alpha \\ 1 & 1 & 3 & 3 & \beta \\ 0 & -1 & 1 & 1 & \gamma \end{pmatrix}$ を行基本変形で簡約化すると，

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 & -4\alpha + 5\beta - 3\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \alpha - \beta \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \alpha - \beta + \gamma \end{pmatrix}$$

となるので，連立一次方程式 $(**)$ は解

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4\alpha + 5\beta - 3\gamma \\ \alpha - \beta \\ \alpha - \beta + \gamma \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (t \text{ は複素数})$$

を持つ．よって，

$$f_2\left(\begin{pmatrix} -4\alpha + 5\beta - 3\gamma & \alpha - \beta \\ \alpha - \beta + \gamma & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

とできるので，$\operatorname{Im} f_2 = \mathbb{C}^3$ となる． □

<u>(3)</u> 線形写像ではない．

<u>理由：</u>$i \in \mathbb{C}$ に対して，

$$f_3(i \cdot 1) = f_3(i) = -i \qquad\qquad i \cdot f_3(1) = i \cdot 1 = i$$

となるので，$f_3(i \cdot 1) \neq i \cdot f_3(1)$ であるため． □

(4) 線形写像ではない．

理由：

$$f_4\left(\begin{pmatrix}1\\10\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\10\end{pmatrix}\right)=f_4\left(\begin{pmatrix}0\\20\end{pmatrix}\right)=20 \qquad f_4\left(\begin{pmatrix}1\\10\end{pmatrix}\right)+f_4\left(\begin{pmatrix}-1\\10\end{pmatrix}\right)=1+(-1)=0$$

となるので，$f_4\left(\begin{pmatrix}1\\10\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\10\end{pmatrix}\right)\neq f_4\left(\begin{pmatrix}1\\10\end{pmatrix}\right)+f_4\left(\begin{pmatrix}-1\\10\end{pmatrix}\right)$ であるため． □

問題 1 補足解説． 線形写像であるかどうかの判定をするためには，与えられた写像が第 11 回講義資料定義 11.1 の条件 (1)，(2) を満たしているかどうかを確認すれば良い．また，全射・単射性を像・核を用いて述べる方法については命題 11.7 を参照すること．

f_3 は，

$$f_3(z+z')=\overline{z+z'}=\overline{z}+\overline{z'}=f_3(z)+f_3(z'),\ \forall z,z'\in\mathbb{C}$$

を満たすので，定義 11.1 の条件 (1) は満たすが (2) は満たさない写像となっている．なお一般に，$f_3(cz)=\overline{c}f_3(z),\ c\in\mathbb{C}$ である．

f_4 は，

$$f_4\left(c\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\right)\begin{cases}=ca=cf_4\left(\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\right) & a\neq 0 \text{ かつ } c\neq 0 \text{ のとき，}\\ =0=cf_4\left(\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\right) & a\neq 0 \text{ かつ } c=0 \text{ のとき，}\\ =cb=cf_4\left(\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\right) & a=0 \text{ のとき，}\end{cases}$$

を満たすので，定義 11.1 の条件 (2) は満たすが (1) は満たさない写像となっている．

この問題に関連するものとして第 12 回講義で以下の命題を証明する．

命題

V と W を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とし，$f\colon V\to W$ を線形写像とする．このとき，以下が成立する．

(1) $\dim_{\mathbb{K}} V<\dim_{\mathbb{K}} W$ のとき，f は全射にはなりえない．

(2) $\dim_{\mathbb{K}} V>\dim_{\mathbb{K}} W$ のとき，f は単射にはなりえない．

これを認めると，本問で f_1 が全射でないことは $\dim_{\mathbb{C}}\mathbb{C}^3=3<\infty=\dim_{\mathbb{C}}\mathbb{C}[x]$ であることからわかり，f_2 が単射でないことは $\dim_{\mathbb{C}}\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{C})=4>3=\dim_{\mathbb{C}}\mathbb{C}^3$ であることからわかる．ただし，f_1 で見たように，$\dim_{\mathbb{C}}\mathbb{C}^3=3<\infty=\dim_{\mathbb{C}}\mathbb{C}[x]$ であるからといって，$f_1\colon\mathbb{C}^3\to\mathbb{C}[x]$ が単射となるわけではないのでそれは注意が必要である． □

問題 2

$\mathbb{K}$ を $\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ とする．V と W を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とし，$f\colon V\to W$ を線形写像とする．このとき以下の問に答えよ．

(1) $U\subset V$ を V の部分空間とする．このとき，W の部分集合

$$f(U)\coloneqq\{f(\boldsymbol{u})\in W\mid \boldsymbol{u}\in U\}$$

は W の部分空間であることを示せ．

(2) $U'\subset W$ を W の部分空間とする．このとき，V の部分集合

$$f^{-1}(U')\coloneqq\{\boldsymbol{v}\in V\mid f(\boldsymbol{v})\in U'\}$$

は V の部分空間であることを示せ．

問題 2 解答例. V, W の零元をそれぞれ $\mathbf{0}_V, \mathbf{0}_W$ と書く．

(1) 部分空間の定義より $\mathbf{0}_V \in U$ で，f は線形写像であることより $f(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$ となるので，$\mathbf{0}_W \in f(U)$ である．

次に，任意の 2 元 $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2 \in f(U)$ をとると，$f(U)$ の定義より，ある $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \in U$ が存在して，$f(\boldsymbol{u}_1) = \boldsymbol{w}_1, f(\boldsymbol{u}_2) = \boldsymbol{w}_2$ となる．これより，

$$\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2 = f(\boldsymbol{u}_1) + f(\boldsymbol{u}_2) = f(\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2)$$

となる．ここで，U は部分空間なので，$\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 \in U$．よって，$\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2 = f(\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2) \in f(U)$.

さらに，任意の $\boldsymbol{w} \in f(U)$ をとると，$f(U)$ の定義より，ある $\boldsymbol{u} \in U$ が存在して $f(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{w}$ となる．これより，任意の $c \in \mathbb{K}$ に対し，

$$c\boldsymbol{w} = cf(\boldsymbol{u}) = f(c\boldsymbol{u})$$

となる．ここで，U は部分空間なので，$c\boldsymbol{u} \in U$．よって，$c\boldsymbol{w} = f(c\boldsymbol{u}) \in f(U)$.

以上より，$f(U)$ は W の部分空間である．

(2) 部分空間の定義より $\mathbf{0}_W \in U'$ で，f は線形写像であることより $f(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W \in U'$ となるので，$\mathbf{0}_V \in f^{-1}(U')$ である．

次に，任意の 2 元 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in f^{-1}(U')$ をとると，$f^{-1}(U')$ の定義より，$f(\boldsymbol{v}_1) \in U'$ かつ $f(\boldsymbol{v}_2) \in U'$ となる．U' は部分空間なので，

$$U' \ni f(\boldsymbol{v}_1) + f(\boldsymbol{v}_2) = f(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2)$$

となる．よって，$\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 \in f^{-1}(U')$.

さらに，任意の $\boldsymbol{v} \in f^{-1}(U')$ をとると，$f^{-1}(U')$ の定義より，$f(\boldsymbol{v}) \in U'$ となる．U' は部分空間なので，任意の $c \in \mathbb{K}$ に対し，

$$U' \ni cf(\boldsymbol{v}) = f(c\boldsymbol{v})$$

となる．よって，$c\boldsymbol{v} \in f^{-1}(U')$.

以上より，$f^{-1}(U')$ は V の部分空間である． □

問題 2 補足解説. 問題 2 で証明した事実は第 11 回講義資料命題 11.6 で証明無しに述べられている．これの証明を今回与えたということになる．証明の方式は命題 11.5 のものとほぼ同じなので，見比べてみて欲しい．線形写像は零元を零元に移すということも思い出しておこう (命題 11.2(1))．なお命題 11.6 直後の注意 2 で述べられているように，これは $\mathrm{Im}\, f$ が W の部分空間，$\mathrm{Ker}\, f$ が V の部分空間であるという事実 (命題 11.5) の一般化である． □