線形代数 II 第 12 回本レポート課題解答例

担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)*

問題 1

$\mathbb{R}$ 上のベクトル空間の間の線形写像 $f\colon \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ が

$$f\left(\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \qquad f\left(\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$
$$f\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \qquad f\left(\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

を満たすとき，

$$f\left(\begin{pmatrix}0 & 5\\ 1 & 6\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}\boxed{\text{ア}}\\ \boxed{\text{イ}}\end{pmatrix}$$

である．$\boxed{\text{ア}}$, $\boxed{\text{イ}}$ に入る<u>整数</u>を順に半角数字でコンマで区切って入力せよ．

問題 1 解答例． c_1, c_2, c_3, c_4 に関する方程式

$$c_1\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix} + c_4\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 5\\ 1 & 6\end{pmatrix} \tag{$*$}$$

を考える．このとき左辺は

$$\begin{pmatrix}c_1+c_2+c_3 & c_1+c_2+c_4\\ c_1+c_3+c_4 & c_2+c_3+c_4\end{pmatrix}$$

となるので，$(*)$ は連立一次方程式

$$\begin{cases}c_1+c_2+c_3=0\\ c_1+c_2+c_4=5\\ c_1+c_3+c_4=1\\ c_2+c_3+c_4=6\end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{pmatrix}1&1&1&0\\1&1&0&1\\1&0&1&1\\0&1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\\c_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\5\\1\\6\end{pmatrix}$$

と同値である．これを解くと，

$$c_1=-2,\ c_2=3,\ c_3=-1,\ c_4=4$$

となる．よって，

$$\begin{aligned}f\left(\begin{pmatrix}0 & 5\\ 1 & 6\end{pmatrix}\right) &= f\left(-2\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\right)\\ &= -2f\left(\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right)+3f\left(\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)-f\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\right)+4f\left(\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\right) \quad (f\ \text{は線形写像なので})\\ &= -2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\5\end{pmatrix}\end{aligned}$$

である． □

問題 1 補足解説． $\left\{\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\right\}$ は一次独立であり，4 次元ベクトル空間 $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ の基底となっている．よって，与えられた線形写像は問題に与えらえた式で一通りに定まっている (第 12 回講義資料命題 12.4)．

* *e-mail*：hoya@shibaura-it.ac.jp

なお，f は具体的には

$$f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} b \\ (-2a+b+4c+d)/3 \end{pmatrix}$$

である． □

問題 2

以下の文の正誤を判定せよ．

『$\mathbb{R}$ 上のベクトル空間の間の 2 つの線形写像

$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}[x], \quad g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}[x]$$

が

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = g\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \qquad f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = g\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$$

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = g\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$$

を満たしたとする．この条件の下では，任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ に対して，必ず

$$f(\boldsymbol{x}) = g(\boldsymbol{x})$$

が成立する．』

問題 2 解答例． 間違い． □

問題 2 補足解説． c_1, c_2, c_3 に関する方程式

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{$*$}$$

を考えると，これは連立一次方程式

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 0 \\ 2c_1 - 2c_3 = 0 \\ c_1 + 2c_2 + 3c_3 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

と同値である．これを解くと，

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \ (c \text{ は任意パラメータ})$$

となる．これより，$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ は一次従属で，

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となる．とくに，$\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}\right\}$ は $\mathbb{R}^3$ を生成しない (3 つの元が 3 次元空間 $\mathbb{R}^3$ を生成するのであれば，それらは一次独立でないといけないため．第 10 回講義資料定理 10.9 (1) 参照)．よって，これらの元

での値が一致しても $\mathbb{R}^3$ 全体で値が一致するとは限らない．例えば，$\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ は $\mathbb{R}^3$ の基底なので，

$$
\begin{aligned}
&f\left(\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\right) = g\left(\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\right) = 1 &\qquad& f\left(\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}\right) = g\left(\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}\right) = x \\
&f\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) = x^2 && g\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) = x^3
\end{aligned}
$$

を満たす線形写像 $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}[x], g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}[x]$ が存在するが (第 12 回講義資料命題 12.4)，これは

$$
f\left(\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\right) = g\left(\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\right) = 1,\ f\left(\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}\right) = g\left(\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}\right) = x,\ f\left(\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}\right) = g\left(\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}\right) = 2x-1
$$

を満たすが，定義より $f\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) \neq g\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ である． □

問題 3

$$
f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ \begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}c_1+2c_2\\c_1+ac_2+c_3\\c_2+c_3\end{pmatrix}
$$

が線形同型写像とならないような実数の定数 a を求めよ．

問題 3 解答例．

$$
A = \begin{pmatrix}1&2&0\\1&a&1\\0&1&1\end{pmatrix}
$$

とすると，線形写像 f は

$$
f\left(\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}\right) = A\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}
$$

を満たす．この A が正則でないことと，f が線形同型写像でないことは同値なので，A が正則とならない a を求めれば良い．

$$
\left|\begin{pmatrix}1&2&0\\1&a&1\\0&1&1\end{pmatrix}\right| = a-3
$$

となるので，この値が 0 となる a は 3 である． □

問題 3 補足解説． 第 12 回講義資料定理 12.5 より，すべての $\mathbb{R}^3$ から $\mathbb{R}^3$ への線形写像はある 3×3 行列 A を用いて，

$$
f_A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ \boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x}
$$

という形に一通りに表せるのであった．さらに，この形の線形写像については，

$$
f_A\text{が線形同型写像} \quad \Leftrightarrow \quad A\text{ が正則行列}
$$

が成り立つのであった (第 12 回講義資料定理 12.10)．解答例ではこの考え方を用いて解答している．

一般に線形写像 $f\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ が与えられたとき，$f = f_A$ を満たす A は

$$
\text{第 } j \text{ 列目を } f(\boldsymbol{e}_j) \text{ とする}
$$

($\boldsymbol{e}_j$ は第 j 成分のみが 1，残りの成分が 0 の n 次縦ベクトル) ことで一般に求められるということを頭に入れておくと良い (第 12 回講義資料定理 12.5 の証明参照)．本問の場合には，

$$f\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\qquad f\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}2\\a\\1\end{pmatrix}\qquad f\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

となるので，これを並べて

$$A=\begin{pmatrix}1&2&0\\1&a&1\\0&1&1\end{pmatrix}$$

とすればよいことがわかる． □

問題 4

以下の文の正誤を判定せよ．

『$f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ を $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間の間の線形写像とする．任意の $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ に対して，ある $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4$ が存在して，

$$f(\boldsymbol{x})=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$$

となるとする．この条件の下では，

$$f(\boldsymbol{x})=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

を満たす $\boldsymbol{x}$ は常に $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ のみである．』

問題 4 解答例． 正しい． □

問題 4 補足解説． 本問の f に対する仮定は f が全射線形写像であるということに他ならない．いま，

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^4 = 4 = \dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$$

なので，第 12 回講義資料命題 12.8 (2) より，全射線形写像 f は線形同型写像となる．つまり，f の単射性が自動的に従う．f が単射であるということは，$\mathrm{Ker}\, f = \{\boldsymbol{0}\}$ と同値であったので (第 11 回講義資料命題 11.7)，つまり

$$f(\boldsymbol{x})=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

を満たす $\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ のみであるということが導かれる． □