# 線形代数 II 第 14 回本レポート課題解答例

担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)*

**問題 1**

線形変換

$$f\colon \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}),\ \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} c_3 + c_4 & ac_2 + 3c_3 + 2c_4 \\ 2c_1 + 2c_2 + c_4 & 3c_1 - c_2 - c_3 \end{pmatrix}$$

が線形同型写像とならないような実数の定数 $a$ を求めよ．

**問題 1 解答例.**

$$E_1 \coloneqq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad E_2 \coloneqq \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad E_3 \coloneqq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad E_4 \coloneqq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とおくと，$B = \{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ は $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ の基底である．いま，

$$\begin{aligned}
f(E_1) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = 0 \cdot E_1 + 0 \cdot E_2 + 2 \cdot E_3 + 3 \cdot E_4 \\
f(E_2) &= \begin{pmatrix} 0 & a \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = 0 \cdot E_1 + a \cdot E_2 + 2 \cdot E_3 + (-1) \cdot E_4 \\
f(E_3) &= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 1 \cdot E_1 + 3 \cdot E_2 + 0 \cdot E_3 + (-1) \cdot E_4 \\
f(E_4) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot E_1 + 2 \cdot E_2 + 1 \cdot E_3 + 0 \cdot E_4
\end{aligned}$$

となるので，線形変換 $f$ の $B$ に関する表現行列は，

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & a & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

となる．これが正則とならないような $a$ を求めれば良い．つまり，

$$\begin{aligned}
0 = \left| \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & a & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right| &= \left| \begin{pmatrix} 0 & a & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right| - \left| \begin{pmatrix} 0 & a & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \right| \ (\text{第 1 行に関して余因子展開}) \\
&= (0 + 3a + (-4) - 0 - 0 - 12) - (0 + 0 + (-6) - 0 - (-2a) - 18) \\
&= a + 8
\end{aligned}$$

となる $a$ を求めればよいので，求める $a$ は $-8$ である． □

**問題 1 補足解説.** 第 14 回講義資料命題 14.1 より，線形写像 $f$ が線形同型写像とならないのは，その表現行列が正則とならないときである．このため，適当に簡単な基底を取り，その表現行列が正則とならないための条件を求めた．

* *e-mail*：hoya@shibaura-it.ac.jp

ちなみに，$a=-8$ のとき $B$ に関する $f$ の表現行列は

$$A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & -8 & 3 & 2\\ 2 & 2 & 0 & 1\\ 3 & -1 & -1 & 0\end{pmatrix}$$

となる．$A$ を行基本変形の繰り返して簡約化すると，

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 3/8\\ 0 & 1 & 0 & 1/8\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

となるので，$x_1, x_2, x_3, x_4$ に関する連立一次方程式

$$A\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix}=\mathbf{0}$$

の一般的な解は，

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}-3\\ -1\\ -8\\ 8\end{pmatrix}, \ c \text{ は任意パラメータ}$$

で与えられる．これを線形写像

$$\psi_B\colon \mathbb{R}^4\to \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}),\ \begin{pmatrix}c_1\\ c_2\\ c_3\\ c_4\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}c_1 & c_2\\ c_3 & c_4\end{pmatrix}$$

で $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ に移すと，

$$\mathrm{Ker}\, f=\left\{\begin{pmatrix}-3c & -c\\ -8c & 8c\end{pmatrix} \middle|\ c\in\mathbb{R}\right\}$$

となり，確かに $f$ は線形同型写像とはなっていないことがわかる (第 14 回講義資料命題 14.1 (1) 参照)． □

**問題 2**

$2\times 2$ 実行列に対する転置写像

$$T\colon\ \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})\to \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}),\ \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix}$$

を考える．$T$ は線形写像である．このとき，$T$ の固有多項式 $\Phi_T(t)$ を求めよ．

**問題 2 解答例.**

$$E_1\coloneqq\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\qquad E_2\coloneqq\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\qquad E_3\coloneqq\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\qquad E_4\coloneqq\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

とおくと，$B=\{E_1,E_2,E_3,E_4\}$ は $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ の基底である．いま，

$$T(E_1)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=1\cdot E_1+0\cdot E_2+0\cdot E_3+0\cdot E_4$$

$$T(E_2)=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}=0\cdot E_1+0\cdot E_2+1\cdot E_3+0\cdot E_4$$

$$T(E_3)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}=0\cdot E_1+1\cdot E_2+0\cdot E_3+0\cdot E_4$$

$$T(E_4)=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=0\cdot E_1+0\cdot E_2+0\cdot E_3+1\cdot E_4$$

となるので，線形変換 $T$ の $B$ に関する表現行列は，

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となる．これより，

$$\begin{aligned}
\Phi_T(t) = \Phi_A(t) &= \left| \begin{pmatrix} t-1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & -1 & 0 \\ 0 & -1 & t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t-1 \end{pmatrix} \right| \\
&= (t-1) \left| \begin{pmatrix} t & -1 & 0 \\ -1 & t & 0 \\ 0 & 0 & t-1 \end{pmatrix} \right| \quad (\text{第 1 行に関して余因子展開}) \\
&= (t-1)^2 \left| \begin{pmatrix} t & -1 \\ -1 & t \end{pmatrix} \right| \quad (\text{第 3 行に関して余因子展開}) \\
&= (t-1)^2(t^2-1) = (t-1)^3(t+1)
\end{aligned}$$

となる． □

**問題 2 補足解説．** 線形変換 $T$ の固有多項式は，定義域と終域で共通の基底をとることで得られる $T$ の表現行列の固有多項式として定義されていた (定義 14.7 (2))．解答例では自然な基底をとって，この定義に従って計算をした．

一方，転置の定義より，

$$\begin{aligned}
T\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
T\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
T\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
T\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

となることは容易にわかる．ここで，$B' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ は，$\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ の次元と同じ数の一次独立な元からなる $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ の部分集合なので $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ の基底となる．よって，初めから $B'$ を基底として取っておくと，$T$ の表現行列は

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

となり，固有多項式の計算も非常に簡単になる．$T$ の固有値 $\lambda$ の固有空間を $V(\lambda)$ と書くことにすると，

$$V(1) \coloneqq \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b, c \in \mathbb{R} \right\}, \quad V(-1) \coloneqq \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; a \in \mathbb{R} \right\}$$

である． □

**問題 3**

2 次以下の $\mathbb{R}$ 係数 1 変数多項式全体のなす $\mathbb{R}[x]$ の部分空間を $\mathbb{R}[x]_{\le 2}$ と書く．つまり，

$$\mathbb{R}[x]_{\le 2} \coloneqq \{a + bx + cx^2 \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$$

とする．線形変換

$$F\colon \mathbb{R}[x]_{\le 2} \to \mathbb{R}[x]_{\le 2},\ f(x) \mapsto (1 + 2x + 3x^2)f''(x) + (1 + x)f'(x) + f(x)$$

を考える． このとき，$F$ の固有値を全て求め，さらにその中で最も大きな固有値に対する固有ベクトルを 1 つ求めよ．

**問題 3 解答例．** $B = \{1, x, x^2\}$ とすると，$B$ は $\mathbb{R}[x]_{\le 2}$ の基底である．ここで，

$$\begin{aligned}
F(1) &= (1 + 2x + 3x^2) \cdot 0 + (1 + x) \cdot 0 + 1 = 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 \\
F(x) &= (1 + 2x + 3x^2) \cdot 0 + (1 + x) \cdot 1 + x = 1 + 2x = 1 \cdot 1 + 2 \cdot x + 0 \cdot x^2 \\
F(x^2) &= (1 + 2x + 3x^2) \cdot 2 + (1 + x) \cdot 2x + x^2 = 2 + 6x + 9x^2 = 2 \cdot 1 + 6 \cdot x + 9 \cdot x^2
\end{aligned}$$

より，基底 $B$ に関する $F$ の表現行列は

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

となる．これより，$F$ の固有方程式は，

$$0 = \Phi_F(t) = \Phi_A(t) = \left| \begin{pmatrix} t-1 & -1 & -2 \\ 0 & t-2 & -6 \\ 0 & 0 & t-9 \end{pmatrix} \right| = (t-1)(t-2)(t-9)$$

となる．よって，求める $F$ の固有値は $1, 2, 9$ である．この中で最も大きなものは $9$ なので，$F$ の固有値 $9$ の固有ベクトルを求める．

$x_1, x_2, x_3$ に関する連立一次方程式

$$(9I_3 - A)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -2 \\ 0 & 7 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を解くと，

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 5 \\ 12 \\ 14 \end{pmatrix},\ c \text{ は任意パラメータ}$$

となる．よって，$A$ の固有値 $9$ の固有空間 $V_A(9)$ は

$$V_A(9) = \left\{ c\begin{pmatrix} 5 \\ 12 \\ 14 \end{pmatrix} \;\middle|\; c \in \mathbb{R} \right\}$$

となる．これを線形写像 $\psi_B\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}[x]_{\le 2},\ \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \mapsto c_1 + c_2x + c_3x^2$ で $\mathbb{R}[x]_{\le 2}$ に移すと，$F$ の固有値 $9$ の固有空間 $V(9)$ は

$$V(9) = \left\{ c(5 + 12x + 14x^2) \;\middle|\; c \in \mathbb{R} \right\}$$

となることがわかる．これより，求める固有ベクトルの 1 つは $5 + 12x + 14x^2$ である． □

**問題 3 補足解説．** 線形変換 $F$ の固有値，固有ベクトル，固有空間は，定義域，終域で共通の基底をとって得られる $F$ の表現行列の固有値，固有ベクトル，固有空間から求められるのであった (第 14 回講義資料 p.7 注意 3 参照)．

ちなみに，本問の解答例と同様にして，

$$V(1) = \{c \mid c \in \mathbb{R}\} \qquad\qquad V(2) = \{c(1+x) \mid c \in \mathbb{R}\}$$

となることがわかる．これより，一般に $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し，

$$\begin{aligned} F^n(a+bx+cx^2) &= F^n\left(\frac{c-2b+2a}{2} \cdot 1 + \frac{-6c+7b}{7}(1+x) + \frac{c}{14}(5+12x+14x^2)\right) \\ &= \frac{c-2b+2a}{2} + \frac{-6c+7b}{7} \cdot 2^n(1+x) + \frac{c}{14} \cdot 9^n(5+12x+14x^2) \end{aligned}$$

となることが計算できる． □