ベクトル空間の基底に関する定理について

大矢 浩徳 (OYA Hironori)*

以下では $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ とする．

本資料では第 10 回講義資料で証明を省略した定理 10.8 と定理 10.9 について証明を与える．以下に基底の定義と定理 10.8，定理 10.9 を再掲しておこう．

定義 10.4

V を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とする．V の部分集合 B が次の性質 (b1)，(b2) を満たすとき，B を V の**基底** (basis) という．

(b1) B は一次独立である．

(b2) B は V を生成する．つまり．$\mathrm{span}_{\mathbb{K}} B = V$ である．

定理 10.8

n を正の整数とする．V を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とする．

このとき，V のある基底が n 個の元からなるとすると，V の任意の基底の元の個数は n 個である．

定理 10.9

V を $\mathbb{K}$ 上の $\{\mathbf{0}\}$ でない有限次元ベクトル空間とし，その次元を n とする．このとき，以下が成立する：

(1) V の n 個の元 $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$ が $V = \mathrm{span}_{\mathbb{K}}\{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$ を満たすとき，$\{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$ は V の基底となる．つまり，一次独立性 (基底の定義条件 (b1)) は自動的に満たされる．

(2) $k \leq n$ とし，$\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k$ を一次独立な V の元の組とする．このとき，適切に V の $(n-k)$ 個の元 $\boldsymbol{v}_{k+1}, \dots, \boldsymbol{v}_n \in V$ が存在して，$\{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{v}_{k+1}, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$ が V の基底となるようにできる．
特に，V の n 個の元 $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$ が一次独立であるとき，$\{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$ は V の基底となる．つまり，生成性 (基底の定義条件 (b2)) が自動的に満たされる．

定理 10.8 の証明． n 個の元からなる V の基底を $B = \{\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_n\}$ とする．さらに V の基底を任意にとり，B' とする．(この時点では B' の元の個数は n 個とは限らず，無限個の可能性もあることに注意する．) そこで，B' の元の個数が n 個であることを示せばよい．

基底の定義条件 (b2) より，ある $p_{ij} \in \mathbb{K}$ $(i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n)$ と相異なる $\boldsymbol{b}'_1, \dots, \boldsymbol{b}'_m \in B'$ が存在して，

$$\boldsymbol{b}_j = \sum_{i=1}^{m} p_{ij} \boldsymbol{b}'_i, \quad j = 1, \dots, n \tag{$*$}$$

と書ける．基底の定義条件 (b2) より，V の任意の元は $\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_n$ の一次結合で書けるので，$(*)$ より，V の任意の元は $\boldsymbol{b}'_1, \dots, \boldsymbol{b}'_m$ の一次結合で書ける．ここで，$\boldsymbol{b}'_1, \dots, \boldsymbol{b}'_m$ は基底 B' の相異なる元であることから，一次独立であることにも注意すると，$\{\boldsymbol{b}'_1, \dots, \boldsymbol{b}'_m\}$ は基底の定義条件 (b1)，(b2) を満たすので，V の基底となる．さらに，B' に $\boldsymbol{b}'_1, \dots, \boldsymbol{b}'_m$ 以外の元が存在するとすると，その元は $\boldsymbol{b}'_1, \dots, \boldsymbol{b}'_m$ の一次結合で書けることから，B' が一次独立な集合であることに反する．よって，$B' = \{\boldsymbol{b}'_1, \dots, \boldsymbol{b}'_m\}$ であり，特に B' は有限集合である．

* *e-mail*： `hoya@shibaura-it.ac.jp`

ここで，再び基底の定義条件 (b2) より，ある $q_{ij} \in \mathbb{K}$ $(i=1,\dots,n, j=1,\dots,m)$ が存在して，

$$\boldsymbol{b}'_j = \sum_{i=1}^{n} q_{ij}\boldsymbol{b}_i, \quad j=1,\dots,m \tag{$**$}$$

と書ける．行列の記法を用いると，$(*)$，$(**)$ は以下のようにまとめられる：

$$P \coloneqq \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{m1} & p_{m2} & \cdots & p_{mn} \end{pmatrix} \qquad Q \coloneqq \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1m} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{n1} & q_{m2} & \cdots & q_{nm} \end{pmatrix}$$

として，

$$(\boldsymbol{b}'_1 \ \cdots \ \boldsymbol{b}'_m)P = (\boldsymbol{b}'_1 \ \cdots \ \boldsymbol{b}'_m)\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{m1} & p_{m2} & \cdots & p_{mn} \end{pmatrix} = (\boldsymbol{b}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{b}_n),$$

$$(\boldsymbol{b}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{b}_n)Q = (\boldsymbol{b}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{b}_n)\begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1m} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{n1} & q_{m2} & \cdots & q_{nm} \end{pmatrix} = (\boldsymbol{b}'_1 \ \cdots \ \boldsymbol{b}'_m).$$

これより，

$$(\boldsymbol{b}'_1 \ \cdots \ \boldsymbol{b}'_m)PQ = (\boldsymbol{b}'_1 \ \cdots \ \boldsymbol{b}'_m), \quad (\boldsymbol{b}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{b}_n)QP = (\boldsymbol{b}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{b}_n).$$

となる．いま，$PQ = (r_{ij})_{i,j=1,\dots,m}$ とすると，成分ごとに見て上の左の式は，

$$\sum_{i=1}^{m} r_{ij}\boldsymbol{b}'_i = \boldsymbol{b}'_j, \quad j=1,\dots,m$$

を意味するが，$\boldsymbol{b}'_1,\dots,\boldsymbol{b}'_m$ らの一次独立性より，$r_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \text{ のとき} \\ 0 & i \neq j \text{ のとき} \end{cases}$ となり，$PQ = I_m$ であることがわかる．全く同様に，$QP = I_n$ である．

さて，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$ に関する連立一次方程式 $P\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}_m$，$Q\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}_n$ を考える ($\boldsymbol{0}_m, \boldsymbol{0}_n$ はそれぞれ m 次，n 次零ベクトル)．すると，

$$P\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}_m \Rightarrow \ QP\boldsymbol{x} = Q\boldsymbol{0}_m \ \Rightarrow \ I_n\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}_n,$$
$$Q\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}_n \Rightarrow \ PQ\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{0}_n \ \Rightarrow \ I_m\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}_m,$$

となるので，これらの連立一次方程式の解の自由度は 0 で，解は一意に定まることがわかる．これより，$\mathrm{rank}(P) = n$，$\mathrm{rank}(Q) = m$ となる (ここでは，この証明の後にある定理※を用いた)，今，P が $m \times n$ 行列，Q が $n \times m$ 行列であることに注意すると，$n = \mathrm{rank}(P) \leq \min\{m,n\} (\leq n)$，$m = \mathrm{rank}(Q) \leq \min\{m,n\} (\leq m)$ なので，$n = \min\{m,n\} = m$.

m は基底 B' の元の個数であったことを思い出すと，示すべきことは示された． □

上の証明中では以下の定理を用いた．これは線形代数 I の範囲であるので，思い出しておいてほしい (第 1 回本レポート課題解答問題 7 補足解説参照).

定理※ (線形代数 I の範囲)

A を各成分が $\mathbb{K}$ の元の $m\times n$ 行列とする．このとき，$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix}$ に関する連立一次方程式

$$A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}_m$$

の一般解に現れる必要最小限のパラメータの数 (=解の自由度) は $n-\operatorname{rank}A$ である．特に，この解が任意定数を含まない場合 $n=\operatorname{rank}A$ である．

定理 10.9 の証明.

(1) $\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_n$ が一次独立であることを示せばよい，$\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_n$ が一次従属であるとすると，ある $(c_1,\dots,c_n)\neq(0,\dots,0)$ が存在して，

$$c_1\boldsymbol{v}_1+\cdots+c_n\boldsymbol{v}_n=\mathbf{0}$$

となる．このとき，$c_k\neq 0$ となる k をとると，

$$\boldsymbol{v}_k=-\frac{1}{c_k}(c_1\boldsymbol{v}_1+\cdots+c_{k-1}\boldsymbol{v}_{k-1}+c_{k+1}\boldsymbol{v}_{k+1}+\cdots+c_n\boldsymbol{v}_n)$$

となるので，$\{\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_{k-1},\boldsymbol{v}_{k+1},\dots,\boldsymbol{v}_n\}$ も V をベクトル空間として生成する．

ここで，$\{\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_{k-1},\boldsymbol{v}_{k+1},\dots,\boldsymbol{v}_n\}$ が再び一次従属であるとすると，上と全く同じ議論を繰り返すことで，$\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_{k-1},\boldsymbol{v}_{k+1},\dots,\boldsymbol{v}_n$ からさらに 1 つ元を取り除いてもそれらが V をベクトル空間として生成するようにできる．この操作を繰り返して，一次独立な集合になるまでベクトルを取り除いてゆき，その最終結果を $\{\boldsymbol{v}_{i_1},\boldsymbol{v}_{i_2},\dots,\boldsymbol{v}_{i_\ell}\}$(元の個数は ℓ 個) とする．(元が 1 つだけになると必ず一次独立なので，この取り除く操作は必ずどこかで終了する．) 元を取り除いているので，$\ell<n$ であることに注意する．

このとき，上のアルゴリズムから $\{\boldsymbol{v}_{i_1},\boldsymbol{v}_{i_2},\dots,\boldsymbol{v}_{i_\ell}\}$ は V をベクトル空間として生成し，かつ一次独立であるので V の基底である．しかし，定理 10.8 より元の個数が n より少ない基底は存在し得ないので，これは矛盾である．よって，$\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_n$ は一次独立である． □

(2) $\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_k$ に V の元をいくつか加えて V の基底が得られるのであれば，定理 10.8 より，加えるベクトルの数は $(n-k)$ 個なので，示すべきことは $\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_k$ に V の元をいくつか加えて V の基底が得られるという事実である．

さて，V の基底を任意に 1 つとり，$\{\boldsymbol{b}_1,\dots,\boldsymbol{b}_n\}$ とする．$\{\boldsymbol{b}_1,\dots,\boldsymbol{b}_n\}\subset\operatorname{span}_{\mathbb{K}}\{\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_k\}$ とすると，$V=\operatorname{span}_{\mathbb{K}}\{\boldsymbol{b}_1,\dots,\boldsymbol{b}_n\}\subset\operatorname{span}_{\mathbb{K}}\{\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_k\}\subset V$ となるので，$\operatorname{span}_{\mathbb{K}}\{\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_k\}=V$．いま，$\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_k$ は一次独立でもあるので，このとき $\{\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_k\}$ は V の基底となり，特に V の元を加える必要はない $(k=n)$.

次に，$\{\boldsymbol{b}_1,\dots,\boldsymbol{b}_n\}\not\subset\operatorname{span}_{\mathbb{K}}\{\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_k\}$ とすると，ある $1\leq\ell\leq n$ が存在して，$\boldsymbol{b}_\ell\notin\operatorname{span}_{\mathbb{K}}\{\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_k\}$ となる．このとき，$\boldsymbol{b}_\ell,\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_k$ は一次独立となることを証明する．ある $c,c_1,\dots,c_k\in\mathbb{K}$ に対し，

$$c\boldsymbol{b}_\ell+c_1\boldsymbol{v}_1+\cdots+c_k\boldsymbol{v}_k=\mathbf{0}$$

となったとすると，$c\neq 0$ のとき，$\boldsymbol{b}_\ell=-\frac{1}{c}(c_1\boldsymbol{v}_1+\cdots+c_k\boldsymbol{v}_k)$ となるので，$\boldsymbol{b}_\ell\in\operatorname{span}_{\mathbb{K}}\{\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_k\}$ となって矛盾．よって，$c=0$ であるが，このとき $\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_k$ の一次独立性より，$c=c_1=\cdots=c_k=0$ である．よって，$\boldsymbol{b}_\ell,\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_k$ は一次独立となる．

$\{\boldsymbol{b}_1,\dots,\boldsymbol{b}_n\}\subset\operatorname{span}_{\mathbb{K}}\{\boldsymbol{b}_\ell,\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_k\}$ のとき，上と全く同じ議論により，$\{\boldsymbol{b}_\ell,\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_k\}$ は V の基底となる．もし，$\{\boldsymbol{b}_1,\dots,\boldsymbol{b}_n\}\not\subset\operatorname{span}_{\mathbb{K}}\{\boldsymbol{b}_\ell,\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_k\}$ のときも，やはり上の議論を繰り返して，$\boldsymbol{b}_{\ell'}\notin\operatorname{span}_{\mathbb{K}}\{\boldsymbol{b}_\ell,\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_k\}$ なる $\boldsymbol{b}_{\ell'}$ を $\{\boldsymbol{b}_\ell,\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_k\}$ に添加し，より大きな一次独立集合を作る．この操作を次々に繰り返すと $\{\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_k\}$ に $\{\boldsymbol{b}_1,\dots,\boldsymbol{b}_n\}$ の元をいくつか ($\boldsymbol{b}_{\ell_1},\dots,\boldsymbol{b}_{\ell_s}$ とする) 付け加えたところで $\{\boldsymbol{b}_1,\dots,\boldsymbol{b}_n\}\subset\operatorname{span}_{\mathbb{K}}\{\boldsymbol{b}_{\ell_1},\dots,\boldsymbol{b}_{\ell_s},\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_k\}$ となる．このとき上のアルゴリズムから，$\{\boldsymbol{b}_{\ell_1},\dots,\boldsymbol{b}_{\ell_s},\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_k\}$ は一次独立で，しかも V をベクトル空間として生成するので，V の基底となる (定理 10.8 より $s=n-k$)．よって示すべきことは示された． □