

# 線形代数 II 第 2 回講義資料

担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)\*

本講義の前半の目標は、

『 $n$  次正方形行列の対角化』

を理解することである。今回は、その第 1 回目として対角化のという考え方および、固有値、固有ベクトル、固有空間について学ぶ。

記号。本講義を通して以下の記号を用いる。これらは一般的な記号である：

- $\mathbb{Z} := \{ \text{整数} \}$ .
- $\mathbb{Q} := \{ \text{有理数} \}$ .
- $\mathbb{R} := \{ \text{実数} \}$ .
- $\mathbb{C} := \{ \text{複素数} \}$ .

また、 $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$  の添え字に『 $> 0, \geq 0, < 0, \leq 0$ 』を付けて、もとの集合からそれぞれ『正, 0 以上, 負, 0 以下』の元を集めてきてできる部分集合を表す。例えば、 $\mathbb{Z}_{>0}$  は正の整数全体のなす集合、 $\mathbb{R}_{\leq 0}$  は 0 以下の実数全体のなす集合である。

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$  または  $\mathbb{C}$  としたとき、正の整数  $n$  に対して、

$$\mathbb{K}^n := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K} \right\}$$

とする。特に、 $\mathbb{K}^n$  の元はいつも列ベクトルと考えるということに注意しておこう。また、

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ (ゼロベクトル)}, \quad \mathbf{e}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ i \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n, \quad i = 1, \dots, n \text{ (単位ベクトル)}$$

とかく。

## 2.1 対角化とは？

$n$  を正の整数とする。 $n$  次対角行列とは、

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix}$$

---

\* e-mail: hoyo@shibaura-it.ac.jp

という形をした行列であった。この行列の1つの特徴としては、整数  $m$  に対して、 $m$  乗が以下のように簡単に計算できるということが挙げられる。

$$D^m = \begin{pmatrix} d_1^m & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2^m & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & d_n^m \end{pmatrix}$$

一般の  $n$  次正方行列  $A$  ではこんなに簡単に  $A^m$  は計算できない。そこで、 $A^m$  を計算するためのアイデアの1つが、『 $A$  の対角化を考える』というものである。先に例を見てみよう：

例 1.  $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$  とする。このとき、 $P = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  とすると、 $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$  であり、

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

となる！これを、 $A$  は  $P$  によって対角化されるという。

さて、この  $P$  をどのように求めたかということは一旦後回しにして、これを用いれば  $A^m$  が求められるということを見てみよう。上の式より、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^m & 0 \\ 0 & 0 & 2^m \end{pmatrix} &= (P^{-1}AP)^m \\ &= \begin{cases} \overbrace{P^{-1}AP P^{-1}AP \cdots P^{-1}AP}^{m \text{ 個}} & (m \geq 0 \text{ のとき}), \\ \overbrace{P^{-1}A^{-1}P P^{-1}A^{-1}P \cdots P^{-1}A^{-1}P}^{-m \text{ 個}} & (m < 0 \text{ のとき}), \end{cases} \\ &= P^{-1}A^m P \end{aligned}$$

となる。この結果の辺々に左から  $P$ 、右から  $P^{-1}$  を掛けて、結局

$$A^m = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^m & 0 \\ 0 & 0 & 2^m \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 - 2^{1+m} & 0 & -3 + 3 \cdot 2^m \\ 1 - 2^m & 2^m & -1 + 2^m \\ 2 - 2^{1+m} & 0 & -2 + 3 \cdot 2^m \end{pmatrix}$$

となることがわかる。

もう1つ例を見ておこう。

例 2.  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -24 & 50 & -35 & 10 \end{pmatrix}$  とする。このとき、 $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{pmatrix}$  とすると、 $P^{-1} =$

$$\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 44 & -26 & 9 & -1 \\ -36 & 57 & -24 & 3 \\ 24 & -42 & 21 & -3 \\ -6 & 11 & -6 & 1 \end{pmatrix} \text{ であり、}$$

$$P^{-1}AP = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 24 & -26 & 9 & -1 \\ -36 & 57 & -24 & 3 \\ 24 & -42 & 21 & -3 \\ -6 & 11 & -6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -24 & 50 & -35 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

となる。これより、 $m \in \mathbb{Z}$  に対し、例 1 と同様の計算により、

$$P^{-1}A^mP = (P^{-1}AP)^m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3^m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4^m \end{pmatrix}$$

となる。この結果の辺々に左から  $P$ 、右から  $P^{-1}$  を掛けて、

$$\begin{aligned} A^m &= P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3^m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4^m \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 4-3 \cdot 2^{m+1} + 4 \cdot 3^m - 4^m & -\frac{13}{3} + 19 \cdot 2^{m-1} - 7 \cdot 3^m + \frac{11}{6} \cdot 4^m & \frac{3}{2} - 2^{m+2} + \frac{7}{2} \cdot 3^m - 4^m & -\frac{1}{6} + 2^{m-1} - \frac{3^m}{2} + \frac{1}{6} \cdot 4^m \\ 4-3 \cdot 2^{m+2} + 4 \cdot 3^{m+1} - 4^{m+1} & -\frac{13}{3} + 19 \cdot 2^m + \frac{22}{3} \cdot 4^m - 7 \cdot 3^{m+1} & \frac{3}{2} - 2^{m+3} + \frac{7}{2} \cdot 3^{m+1} - 4^{m+1} & -\frac{1}{6} + 2^m - \frac{3^{m+1}}{2} + \frac{2}{3} \cdot 4^m \\ 4-3 \cdot 2^{m+3} + 4 \cdot 3^{m+2} - 4^{m+2} & -\frac{13}{3} + 19 \cdot 2^{m+1} - 7 \cdot 3^{m+2} + \frac{88}{3} \cdot 4^m & \frac{3}{2} - 2^{m+4} + \frac{7}{2} \cdot 3^{m+2} - 4^{m+2} & -\frac{1}{6} + 2^{m+1} - \frac{3^{m+2}}{2} + \frac{8}{3} \cdot 4^m \\ 4-3 \cdot 2^{m+4} + 4 \cdot 3^{m+3} - 4^{m+3} & -\frac{13}{3} + 19 \cdot 2^{m+2} - 7 \cdot 3^{m+3} + \frac{352}{3} \cdot 4^m & \frac{3}{2} - 2^{m+5} + \frac{7}{2} \cdot 3^{m+3} - 4^{m+3} & -\frac{1}{6} + 2^{m+2} - \frac{3^{m+3}}{2} + \frac{32}{3} \cdot 4^m \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となることがわかる。

### コラム： $m$ 乗計算の応用例

上では正方行列の  $m$  乗を計算するアイデアとして対角化について述べたが、正方行列の  $m$  乗というものがどういったところで出てくるか 1 つ例を挙げておこう。

#### 線形漸化式で定まる数列の一般項

次で定まる数列  $\{a_n\}_{n=0,1,2,\dots}$  を考えよう。

$$a_0 = a, \quad a_1 = b, \quad a_2 = c, \quad a_3 = d, \quad a_{n+4} = -24a_n + 50a_{n+1} - 35a_{n+2} + 10a_{n+3} \quad (n \geq 0).$$

ただし、 $a, b, c, d$  は定数。このとき、この漸化式は行列を用いて次のように表示できる：

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_{n+2} \\ a_{n+3} \\ a_{n+4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -24 & 50 & -35 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \\ a_{n+2} \\ a_{n+3} \end{pmatrix} \quad (n \geq 0).$$

このとき、 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -24 & 50 & -35 & 10 \end{pmatrix}$  とおくと、上式を繰り返し用いることで、任意の  $n$  に対して、

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \\ a_{n+2} \\ a_{n+3} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_n \\ a_{n+1} \\ a_{n+2} \end{pmatrix} = A^2 \begin{pmatrix} a_{n-2} \\ a_{n-1} \\ a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \dots = A^n \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

となることがわかる。これより、後は  $A^n$  が計算できれば左辺を計算してその第 1 成分を見ることで  $a_n$  ( $n \geq 1$ ) が求められることがわかる。この  $A^n$  については、例 2 で計算したので、その結果を使うと、

$$\begin{aligned} a_n &= a(4-3 \cdot 2^{m+1} + 4 \cdot 3^m - 4^m) + b(-\frac{13}{3} + 19 \cdot 2^{m-1} - 7 \cdot 3^m + \frac{11}{6} \cdot 4^m) \\ &\quad + c(\frac{3}{2} - 2^{m+2} + \frac{7}{2} \cdot 3^m - 4^m) + d(-\frac{1}{6} + 2^{m-1} - \frac{3^m}{2} + \frac{1}{6} \cdot 4^m) \\ &= (4a - \frac{13}{3}b + \frac{3}{2}c - \frac{d}{6}) + (-6a + \frac{19}{2}b - 4c + \frac{d}{2}) \cdot 2^m \\ &\quad + (4a - 7b + \frac{7}{2}c - \frac{d}{2}) \cdot 3^m + (-a + \frac{11}{6}b - c + \frac{d}{6}) \cdot 4^m \end{aligned}$$

であることがわかる。最後に  $x^m$  の形に出てくる部分の  $x$  は、 $A$  を対角化した時に対角成分に並んでいた数 1, 2, 3, 4 であるということに注意しておこう。

なお、 $A^n$  の現れる他の重要な話として、『行列  $A$  の指数関数  $e^A$  を考える』という話がある。これはまた別の機会に解説する。興味のある方は『行列の指数関数』というキーワードで調べてみてもらいたい。微分方程式等への応用がある重要な話題である。(実は上の数列の話題を“連続化”したような話と考えることができる。長谷川 浩司 著「線型代数 [改訂版]」第 5 章参照。)

さて、対角化の話に戻ろう。以下は非常に自然な問題だと思われる：

(Q1)  $n$  次正方行列  $A$  の対角化に用いる行列 (上の例 1, 2 の  $P$ ) はどうやって見つけるのか?

(Q2)  $n$  次正方行列  $A$  に対して、 $A$  を対角化するような  $n$  次正方行列  $P$  はいつでも存在するのか?

これから何回かの講義ではこれらの疑問に答えていくことになる。ちなみに、(Q2) の答えは一般には NO である。

## 2.2 固有値, 固有ベクトル, 固有空間

以下では  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  または  $\mathbb{C}$  とする\*1。まずは上の (Q1) の間に答えることを目指す。重要な言葉を準備しよう。

### 定義 2.1

$A$  を  $\mathbb{K}$  の元を成分とする  $n$  次正方行列とする。0 でないベクトル  $v \in \mathbb{K}^n$  が、ある  $\lambda \in \mathbb{K}$  に対して、

$$Av = \lambda v$$

を満たすとき、 $\lambda$  を  $A$  の固有値、 $v$  を  $A$  の固有値  $\lambda$  の固有ベクトルという。さらに、 $A$  の固有値  $\lambda$  に対して、

$$V(\lambda) := \{v \in \mathbb{K}^n \mid Av = \lambda v\} (\subset \mathbb{K}^n)$$

とし、これを  $A$  の固有値  $\lambda$  の固有空間という。言葉で言うと、固有値  $\lambda$  の固有空間とは『固有値  $\lambda$  の固有ベクトル (と 0) を全て集めてきてできる  $\mathbb{K}^n$  の部分集合』である。

(Q1) の答えは大まかに言うと次のようになる：

『 $A$  の固有ベクトルを十分沢山知っていれば  $A$  を対角化する  $P$  を求めることができる』

この仕組みを説明する。 $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{K}^n$  をそれぞれ固有値  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  に対応する  $A$  の固有ベクトルであるとする。つまり、 $i = 1, \dots, n$  に対して、

$$Ap_i = \lambda_i p_i \tag{2.1}$$

であるとする。ここで、 $p_1, \dots, p_n$  を並べてできる行列  $P := (p_1 \cdots p_n)$  が正則であると仮定する。これが、上の“固有ベクトルを十分沢山知っている”という言葉の正確な意味である。このとき、以下の原理で  $P^{-1}AP$  が対角行列になる。

まず、 $P^{-1}P = I_n$  ( $I_n$  は  $n$  次単位行列。以下常にこの記号を使う。) であるが、これは列ごとの計算で見ると、

$$(P^{-1}p_1 \ P^{-1}p_2 \ \cdots \ P^{-1}p_n) = P^{-1}P = I_n = (e_1 \ e_2 \ \cdots \ e_n)$$

ということを表している。両辺を比べると、 $i = 1, \dots, n$  に対して、 $P^{-1}p_i = e_i$  であることがわかる。これと

\*1 この講義ではしばしば『 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  または  $\mathbb{C}$  とする』という言葉が出てくるが、進んで勉強している方はより一般に、『 $\mathbb{K}$  を体 (field) とする』と読み替えて良い。ただし、たまに  $\mathbb{C}$  (より一般には代数閉体) でないと通用しない議論があるので、そこは注意が必要がある。そのような場所はプリント内でも適宜注意することにする。

(2.1) を合わせると,

$$\begin{aligned}
 P^{-1}AP &= P^{-1}A(\mathbf{p}_1 \cdots \mathbf{p}_n) \\
 &= P^{-1}(A\mathbf{p}_1 \cdots A\mathbf{p}_n) \\
 &= P^{-1}(\lambda_1\mathbf{p}_1 \cdots \lambda_n\mathbf{p}_n) \\
 &= (\lambda_1P^{-1}\mathbf{p}_1 \cdots \lambda_nP^{-1}\mathbf{p}_n) \\
 &= (\lambda_1\mathbf{e}_1 \cdots \lambda_n\mathbf{e}_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

となることがわかる。これより  $A$  の固有ベクトルを、それを並べてできる行列  $P$  が正則になるくらい沢山見つけることができれば、その  $P$  を用いて  $A$  が対角化され、対角化の結果においては対応する固有値が対角に並ぶということがわかる。この具体的な実行のアルゴリズムについては次回以降解説を行う。上で見た例 1, 2 の  $P$  もこの方法で見つけられるものである。

例 3. 例 1 の  $A, P$  を考える。このとき、 $P$  を列ごとに見て、

$$\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とすると、確かに

$$\begin{aligned}
 A\mathbf{p}_1 &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \mathbf{p}_1 \\
 A\mathbf{p}_2 &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\mathbf{p}_2 \\
 A\mathbf{p}_3 &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\mathbf{p}_3
 \end{aligned}$$

となるので、 $\mathbf{p}_1$  は固有値 1 の固有ベクトル、 $\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$  は固有値 2 の固有ベクトルである。これより、

$$\begin{aligned}
 P^{-1}AP &= P^{-1}A(\mathbf{p}_1 \ \mathbf{p}_2 \ \mathbf{p}_3) \\
 &= P^{-1}(A\mathbf{p}_1 \ A\mathbf{p}_2 \ A\mathbf{p}_3) \\
 &= P^{-1}(\mathbf{p}_1 \ 2\mathbf{p}_2 \ 2\mathbf{p}_3) \\
 &= (P^{-1}\mathbf{p}_1 \ 2P^{-1}\mathbf{p}_2 \ 2P^{-1}\mathbf{p}_3) \\
 &= (\mathbf{e}_1 \ 2\mathbf{e}_2 \ 2\mathbf{e}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

となることがわかる。これは  $P$  の各列が固有ベクトルであることを知っていれば、 $P^{-1}AP$  (特に  $P^{-1}$ ) を具体的に計算する必要は無いということを言っていることに注意しよう。

固有空間についても見ておこう。 $A$  の固有値 1 の固有空間は

$$V(1) := \{\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \mid A\mathbf{v} = \mathbf{v}\}$$

であるが、 $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  と考えると、

$$A\mathbf{v} = \mathbf{v} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 3z = x \\ -x + 2y + z = y \\ -2x + 4z = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 3z = 0 \\ -x + y + z = 0 \end{cases}$$

なので、これは上の連立一次方程式の解の空間に他ならない。これを解くと、

$$V(1) = \left\{ \begin{pmatrix} 3s \\ s \\ 2s \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{K} \right\}$$

となることがわかる。同様に、

$$V(2) := \{ \mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \mid A\mathbf{v} = 2\mathbf{v} \}$$

であるが、 $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  と考えると、

$$A\mathbf{v} = \mathbf{v} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 3z = 2x \\ -x + 2y + z = 2y \\ -2x + 4z = 2z \end{cases} \Leftrightarrow -x + z = 0$$

となるので、

$$V(2) = \left\{ \begin{pmatrix} s \\ t \\ s \end{pmatrix} \mid s, t \in \mathbb{K} \right\}$$

となる。こうしてみると  $V(1)$  はパラメータが1つ ( $s$ ) で記述されるので“1次元分”あり、 $V(2)$  はパラメータが2つ ( $s, t$ ) で記述されるので“2次元分”あり、 $V(1)$  の元と  $V(2)$  の元の和として3次元空間  $\mathbb{K}^3$  の元が全て作れるという状況になっている。実はこれが、『固有ベクトルを並べて正則な行列が作れる』（“固有ベクトルが十分沢山ある”）という事実に対応している。このことも今後の講義で厳密に扱う。

例2の方についても全く同様の計算ができる。こちらは是非各自試してみて欲しい。（ $A$ の固有値は1, 2, 3, 4で、それぞれの固有空間の“次元”は全て1である。）