# 線形代数 II 第 3 回講義資料

担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)*

以下では $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ とする．単に「$n$ 次正方行列」と書いた時には $\mathbb{K}$ の元を成分とする $n$ 次正方行列を考えているとする．

## 3.1 前回の復習：問題の整理

私たちの目標は，

『$n$ 次正方行列の対角化』

ができるようになることであった．考えていた問題は以下である．

(Q1) $n$ 次正方行列 $A$ の対角化に用いる $n$ 次正方行列 $P$ はどうやって見つけるのか?
(Q2) $n$ 次正方行列 $A$ に対して，$A$ を対角化するような $n$ 次正方行列 $P$ はいつでも存在するのか?

前回学んだことは以下である：

(I) $A$ の固有ベクトル $\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_n \in \mathbb{K}^n$ であって，それを並べてできる行列 $P := (\boldsymbol{p}_1 \cdots \boldsymbol{p}_n)$ が正則となるものがあれば，その $P$ が $A$ を対角化する行列である (第 2 回講義資料 p.4–5).

(II) $A$ の固有値 $\lambda$ がわかっているとき，対応する固有ベクトルは連立一次方程式を解けば見つけられる (第 2 回講義資料例 3).

このことから，残された問題は，

(Q1)$'$ $n$ 次正方行列 $A$ の固有値はどのようにして求めれば良いのか?
(Q2)$'$ $A$ のどの固有ベクトルをどのように並べても正則な正方行列ができない場合，$A$ は対角化できないのか? (つまり，固有ベクトルを並べて正則行列が作れるということは $A$ が対角化可能出あることの必要十分条件なのか?) また，$A$ の固有ベクトルをどのように並べても正則な正方行列にならないというようなことは実際に起こるのか?

ということになる．

## 3.2 対角化可能性

今回はまず (Q2)$'$ の前半に答えよう．答えは YES である．

**命題 3.1**

$n$ 次正方行列 $A$ に対し，以下は同値である．

(1) $A$ は対角化可能.
(2) $A$ の $n$ 個の固有ベクトル $\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_n \in \mathbb{K}^n$ であって，それを並べてできる $n$ 次正方行列 $P = (\boldsymbol{p}_1 \cdots \boldsymbol{p}_n)$ が正則になるようなものが存在する．

* *e-mail*：hoya@shibaura-it.ac.jp

**証明.** (2) $\Rightarrow$ (1) は第 2 回講義資料 p.4–5 の計算で示した通りなので，(1) $\Rightarrow$ (2) を示す．$A$ がある $n$ 次正方行列 $P$ を用いて対角化された，つまり

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} = (\lambda_1 \boldsymbol{e}_1 \cdots \lambda_n \boldsymbol{e}_n)$$

となったと仮定する ($\boldsymbol{e}_i$ という記号については第 2 回講義資料 p.1 参照)．このとき，$P$ の第 $i$ 列を $\boldsymbol{p}_i$ と書くことにすると (つまり $\boldsymbol{p}_i = P\boldsymbol{e}_i$)，

$$P^{-1}AP = (P^{-1}A\boldsymbol{p}_1 \cdots P^{-1}A\boldsymbol{p}_n)$$

となることより，各 $i = 1, \ldots, n$ に対し，

$$P^{-1}A\boldsymbol{p}_i = \lambda_i \boldsymbol{e}_i$$

が成立することがわかる．この式の両辺に左から $P$ を掛けると，

$$A\boldsymbol{p}_i = \lambda_i P\boldsymbol{e}_i = \lambda_i \boldsymbol{p}_i$$

となり，$\boldsymbol{p}_i$ は $A$ の固有値 $\lambda_i$ の固有ベクトルであることがわかる．これより，$P$ が $A$ の固有ベクトルを並べてできる $n$ 次正方行列に他ならない． □

この証明を見ると，$A$ を対角化する行列 $P$ は結局 $A$ の固有ベクトルを並べてできる正方行列でしかあり得ないということがわかる．$A$ の取り方によっては，その固有ベクトルをどのように並べても正則な正方行列にならないというようなことがあり得るということは次の節で見ることにする．

## 3.3 固有多項式

次は，(Q1)$'$ に答えよう．$A$ を $n$ 次正方行列としたとき，『$A$ の固有値 $\lambda$ の固有ベクトル $\boldsymbol{v}$ が存在する』という条件を次のように言い換えてみる：

$A$ の固有値$\lambda$の固有ベクトル $\boldsymbol{v}$ が存在する．
$\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{0} \neq \boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n$であって，$A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$ となるものが存在する．
$\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{0} \neq \boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n$であって，$(\lambda I_n - A)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ ($I_n$は $n$ 次単位行列) となるものが存在する．
$\Leftrightarrow$ 連立一次方程式 $(\lambda I_n - A)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}$ が $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}$ 以外の解を持つ．
$\Leftrightarrow$ 連立一次方程式 $(\lambda I_n - A)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}$ の解の自由度が 1 以上である．
$\Leftrightarrow$ $\mathrm{rank}(\lambda I_n - A) < n$.
$\Leftrightarrow$ $\lambda I_n - A$ は正則でない．
$\Leftrightarrow$ $\det(\lambda I_n - A) = 0$.

この観察から，以下のような定義を行う．

**定義 3.2**

$n$ 次正方行列 $A$ に対し，$\underline{t\text{ を変数}}$とする多項式 $\Phi_A(t)$ を，

$$\Phi_A(t) := \det(tI_n - A)$$

と定義する．この多項式を $A$ の**固有多項式** (あるいは**特性多項式**) という．また，方程式

$$\Phi_A(t) = 0$$

を $A$ の**固有方程式** (あるいは**特性方程式**) という．

定義 3.2 の前の観察から以下の定理がわかる．

**定理 3.3**

$n$ 次正方行列 $A$ に対し，$\lambda$ が $A$ の固有値であることと，$\lambda$ が $A$ の固有方程式 $\Phi_A(t) = 0$ の解であることは同値である．

**例 1．** $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$ とする．このとき，$A$ の固有多項式は，

$$\Phi_A(t) = |tI_2 - A| = \left|\begin{pmatrix} t+2 & -1 \\ 4 & t-3 \end{pmatrix}\right| = (t+2)(t-3) - (-1)\cdot 4 = t^2 - t - 2 = (t+1)(t-2)$$

となる．よって，固有方程式 $\Phi_A(t) = 0$ の解は，$t = -1, 2$．よって，$A$ は $-1, 2$ を固有値として持つ．

実際に対応する固有ベクトルを求めて $A$ を対角化してみよう．

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -2x + y = -x \\ -4x + 3y = -y \end{cases} \iff x = y$$

より，$A$ の固有値 $-1$ の固有空間 $V(-1)$ は

$$V(-1) = \left\{ \begin{pmatrix} s \\ s \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^2 \;\middle|\; s \in \mathbb{K} \right\}$$

で，固有値 $-1$ の固有ベクトルはここから $\mathbf{0}$ でないベクトルを 1 つ選べばよいから例えば $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ がとれる．同様に，

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -2x + y = 2x \\ -4x + 3y = 2y \end{cases} \iff 4x = y$$

より，$A$ の固有値 2 の固有空間 $V(2)$ は

$$V(2) = \left\{ \begin{pmatrix} s \\ 4s \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^2 \;\middle|\; s \in \mathbb{K} \right\}$$

で，固有値 2 の固有ベクトルはここから $\mathbf{0}$ でないベクトルを 1 つ選べばよいから例えば $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ がとれる．このとき，

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

とするとこれは正則で，

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

となる．なお，この最後の計算では $P^{-1}$ を具体的に計算する必要はなくて，$P$ が (固有値 $-1$ の固有ベクトル，固有値 2 の固有ベクトル) という形の行列であることから結果が直ちにわかっているということに注意しよう．例えば，上で $P$ における固有ベクトルの並べ方を変えて，

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

としていると，

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

となる．

**例 2.** $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & -4 \\ -4 & 3 & 4 \\ 3 & -5 & -5 \end{pmatrix}$ とする．このとき，$A$ の固有多項式は，

$$\begin{aligned}
\Phi_A(t) &= \left| \begin{pmatrix} t-2 & 5 & 4 \\ 4 & t-3 & -4 \\ -3 & 5 & t+5 \end{pmatrix} \right| \\
&= (t-2)(t-3)(t+5) + 5 \cdot (-4) \cdot (-3) + 4 \cdot 4 \cdot 5 - (t-2) \cdot (-4) \cdot 5 - 5 \cdot 4 \cdot (t+5) - 4 \cdot (t-3) \cdot (-3) \\
&= t^3 - 7t - 6 = (t+1)(t+2)(t-3)
\end{aligned}$$

となる．よって，固有方程式 $\Phi_A(t) = 0$ の解は，$t = -1, -2, 3$．よって，$A$ は $-1, -2, 3$ を固有値として持つ．実際に固有ベクトルを求める計算は各自例 1 の真似をして行ってみてもらいたい．最終的に対角化の結果として対角成分に $-1, -2, 3$ が 1 つずつ現れるものが得られれば正解である ($-1, -2, 3$ の並び方については例 1 で見たように $P$ を作るときの固有ベクトルの並べ方による)．

**例 3** ((やや発展))**.** $n \geq 2$ とし，$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ c_0 & c_1 & \cdots & c_{n-2} & c_{n-1} \end{pmatrix}$ $(c_0, \ldots, c_{n-1} \in \mathbb{K})$ とする．このとき，

$A$ の固有多項式は

$$\Phi_A(t) = t^n - c_{n-1}t^{n-1} - \cdots - c_1 t - c_0 \tag{3.1}$$

となる．このことを $n$ に関する帰納法で証明する．まず，$n = 2$ のとき，$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c_0 & c_1 \end{pmatrix}$ なので，

$$\Phi_A(t) = \left| \begin{pmatrix} t & -1 \\ -c_0 & t - c_1 \end{pmatrix} \right| = t(t - c_1) - (-1)(-c_0) = t^2 - c_1 t - c_0$$

となり，(3.1) は確かに正しい．次に，$n = k (k \geq 2)$ の場合に (3.1) が成り立っていると仮定して，$n = k + 1$ の場合を示す．

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ c_0 & c_1 & \cdots & c_{k-1} & c_k \end{pmatrix} \quad ((k+1) \times (k+1) \text{ 行列})$$

に対し，

$$\begin{aligned}
\Phi_A(t) &= \left| \begin{pmatrix} t & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & t & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & t & -1 \\ -c_0 & -c_1 & \cdots & -c_{k-1} & t - c_k \end{pmatrix} \right| \\
&= t \left| \begin{pmatrix} t & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & t & -1 \\ -c_1 & \cdots & -c_{k-1} & t - c_k \end{pmatrix} \right| + (-1)^{1+k+1}(-c_0) \left| \begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ t & -1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & t & -1 \end{pmatrix} \right|
\end{aligned}$$

(第 1 列に関して余因子展開)

ここで，和の第 1 項は $k \times k$ 行列で今考えている行列 $A$ の形をしているものの固有多項式となっているので，帰納法の仮定より，

$$t\left|\begin{pmatrix} t & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & t & -1 \\ -c_1 & \cdots & -c_{k-1} & t-c_k \end{pmatrix}\right| = t(t^k - c_k t^{k-1} - \cdots - c_2 t - c_1) = t^{k+1} - c_k t^k - \cdots - c_2 t^2 - c_1 t$$

さらに，和の第 2 項の行列式は $k \times k$ の下三角行列の行列式で，対角成分は全て $-1$ なので，その値は $(-1)^k$(下三角行列/上三角行列の行列式は対角成分の積であったことを思い出そう．証明は余因子展開を考えれば容易である．)．よって，

$$(-1)^{1+k+1}(-c_0)\left|\begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ t & -1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & t & -1 \end{pmatrix}\right| = (-1)^{k+2}(-c_0)(-1)^k = ((-1)^2)^{k+1}(-c_0) = -c_0.$$

以上より，

$$\Phi_A(t) = t^{k+1} - c_k t^k - \cdots - c_2 t^2 - c_1 t - c_0$$

も示された．よって，(3.1) が証明された．

この例で扱った形の行列 $A$ は，線形漸化式

$$a_{\ell+n} = c_0 a_\ell + c_1 a_{\ell+1} + \cdots + c_{n-1} a_{\ell+n-1}$$

で定まる数列 $\{a_\ell\}_{\ell=0,1,2,\ldots}$ を表すのに用いられる行列であった．つまり，この数列は

$$A\begin{pmatrix} a_\ell \\ a_{\ell+1} \\ \vdots \\ a_{\ell+n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ c_0 & c_1 & \cdots & c_{n-2} & c_{n-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_\ell \\ a_{\ell+1} \\ \vdots \\ a_{\ell+n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{\ell+1} \\ a_{\ell+2} \\ \vdots \\ a_{\ell+n} \end{pmatrix}$$

で定まる数列と言っても良い．このとき，この数列の一般項を求めるためには $A^\ell$ を求めれば良かった (第 2 回講義資料 p.3 コラム参照)．(必ずしも $A$ が対角化できるとは限らないが，) もし $A$ が対角化できるのであれば，$A^\ell$ を求められる．そこで，対角化のためにはまず $A$ の固有値を知る必要があり，固有方程式 $\Phi_A(t) = 0$ を解く必要がある．つまり，

$$t^n - c_{n-1}t^{n-1} - \cdots - c_1 t - c_0 = 0$$

をまず解けばよいということがわかる．もし高校などで三項間漸化式

$$a_{\ell+2} = c_0 a_\ell + c_1 a_{\ell+1}$$

の解き方として，『まず特性多項式 $t^2 - c_1 t - c_0 = 0$ を解く』という方法を習った人がいれば，『この方程式はどこから来たのか?』と思ったことがある人もいるかもしれないが，これはまさにここでの解法の $n = 2$ の場合に他ならない．この方法は実は $n$ 項間漸化式に一般化できるものだったのである．

注意 1. $n$ 次正方行列 $A$ の固有多項式 $\Phi_A(t)$ は，以下を満たすことに注意しよう．証明はいずれも固有多項式の定義から考えればわかるので考えてみて欲しい．

- $n$ 次式で，$t^n$ の係数は 1.
- 定数項は $(-1)^n \det(A)$.
- $t^{n-1}$ の係数は $A$ の対角成分の和を $-1$ 倍したもの ($A$ の $(i,j)$ 成分を $a_{ij}$ と書くことにすると $-\sum_{i=1}^n a_{ii}$)．なお，$A$ の対角成分の和は $A$ の**トレース** $\mathrm{Tr}(A)$ と呼ばれる重要な値である．

つまり，一般に

$$\Phi_A(t) = t^n - \mathrm{Tr}(A)t^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(A)$$

という形をしている．特に，$A$ が 2 次正方行列の時，

$$\Phi_A(t) = t^2 - \mathrm{Tr}(A)t + \det(A)$$

である．

さて，対角化の話に戻ろう．正方行列 $A$ の固有多項式は，固有値として「どういう数が出てくるか」という情報 (定理 3.3) だけでなく，最終的に対角化した時に「どういう数がいくつ出てくるか」という情報まで持っている．それを主張するのが以下の定理である．

**定理 3.4**

$n$ 次正方行列 $A$ が対角化可能であるとする．このとき，$A$ の固有多項式 $\Phi_A(t)$ は以下のように一次式の積に書ける：

$$\Phi_A(t) = (t-\lambda_1)^{m_1} \cdots (t-\lambda_k)^{m_k}$$

ただし，$\lambda_i \in \mathbb{K}$ で，$i \neq j$ のとき，$\lambda_i \neq \lambda_j$．各 $m_i$ は正の整数で，$\sum_{i=1}^{k} m_i = n$.
さらにこのとき，$A$ を対角化した結果の対角成分には $\lambda_i$ が $m_i$ 個 $(i = 1, \ldots, k)$ 現れる．特に，$A$ を対角化した結果は対角成分の並べ順の違いの差を除くと 1 通りに定まる．

証明の前に行列式に関する以下の性質を思い出す．

$n$ 次正方行列 $A, B$ に対し，

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

である．特に，$\det(A) \neq 0$ のとき，$\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$ である．

**定理 3.4 の証明.** $A$ が対角化できるとき，ある $n$ 次正則行列 $P$ を用いて，

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \cdots & & \ddots & & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_k \end{pmatrix} \qquad (\lambda_1 \text{が } m_1 \text{個}, \lambda_2 \text{が } m_2 \text{個}, \ldots, \lambda_k \text{が } m_k \text{個})$$

という形に書ける．ただし，$\lambda_i \in \mathbb{K}$ で，$i \neq j$ のとき，$\lambda_i \neq \lambda_j$(これまでの考察により，$P$ の列ベクトルの並べ方を変えることで対角成分は自由に並べ替えられたことに注意する)．このとき，上で思い出した行列式に関する性質より，

$$\begin{aligned}
\Phi_A(t) &= \det(tI_n - A) \\
&= \det(P^{-1})\det(tI_n - A)\det(P) \\
&= \det(P^{-1}(tI_n - A)P) \\
&= \det(tI_n - P^{-1}AP) \\
&= \det \begin{pmatrix} t-\lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t-\lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \cdots & & \ddots & & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t-\lambda_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t-\lambda_k \end{pmatrix} = (t-\lambda_1)^{m_1} \cdots (t-\lambda_k)^{m_k}
\end{aligned}$$

となる．多項式 $\Phi_A(t)$ を 1 次式の積に分解する方法は 1 通りなので，これは $A$ の対角化の結果が $\Phi_A(t)$ から (対角成分の並べ順の違いの差を除いて)1 通りに決まってしまっていることを意味している． $\square$

**例 4.** $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ とする．このとき，$A$ の固有多項式は，

$$\begin{aligned}\Phi_A(t) &= \left|\begin{pmatrix} t+1 & 0 & -3 \\ 1 & t-2 & -1 \\ 2 & 0 & t-4 \end{pmatrix}\right| \\ &= (t+1)(t-2)(t-4) + 0\cdot(-1)\cdot 2 + (-3)\cdot 1\cdot 0 - (t+1)\cdot(-1)\cdot 0 - 0\cdot 1\cdot(t-4) - (-3)\cdot(t-2)\cdot 2 \\ &= t^3 - 5t^2 + 8t - 4 = (t-1)(t-2)^2\end{aligned}$$

となる．これより，定理 3.4 から，$A$ は<u>対角化されるとすれば</u>，

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

となることがわかる (1 が 1 つ，2 が 2 つ)．第 2 回講義資料例 1 より，この $A$ は実際にこの形に対角化可能であった．

**例 5.** 最後に，$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ が対角化不可能であることを証明してみよう．$A$ の固有多項式は，

$$\Phi_A(t) = \left|\begin{pmatrix} t & -1 & 0 \\ 0 & t & -1 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix}\right| = t^3$$

となるので，定理 3.4 から，$A$ は対角化されるとすれば，

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となることがわかる (対角成分に 0 が 3 つの対角行列)．しかし，このときこの式の両辺に左から $P$，右から $P^{-1}$ を掛けて，

$$A = P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となり，矛盾する．よって，$A$ は対角化不可能である．実際，

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

より，$A$ の固有値 0 に対応する固有空間 $V(0)$ は

$$V(0) = \left\{ \begin{pmatrix} s \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^3 \;\middle|\; s \in \mathbb{K} \right\}$$

となり，ここから 3 つのベクトルを選んで並べても 2, 3 行目が全て 0 の行列しか作ることができず，正則行列は作れない．