線形代数 II 第 4 回講義資料

担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)*

以下では $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ とする．単に「n 次正方行列」と書いた時には $\mathbb{K}$ の元を成分とする n 次正方行列を考えているとする．

今回『対角化可能性』についてより深く掘り下げ，対角化可能性の判定も含めて対角化が完全にできるようになることが目標である．

4.1　固有多項式補足

本題に入る前に，固有多項式の性質の 1 つについて補足しておく．この性質は前回の定理 3.4 の証明中で実質的に証明しているが，重要なので改めて定理として述べる．

定理 4.1

任意の n 次正方行列 A と任意の n 次正則行列 X に対し，A の固有多項式と，$X^{-1}AX$ の固有多項式は一致する．つまり，n 次正方行列 A の固有多項式を $\Phi_A(t)$ と書くことにするとこのとき，

$$\Phi_A(t) = \Phi_{X^{-1}AX}(t)$$

である．

証明.

$$\begin{aligned}
\Phi_A(t) &= \det(tI_n - A) \\
&= \det(X^{-1})\det(tI_n - A)\det(X) \quad \left(\det(X^{-1}) = \frac{1}{\det(X)}\text{なので}\right) \\
&= \det(X^{-1}(tI_n - A)X) \\
&= \det(tX^{-1}X - X^{-1}AX) \\
&= \det(tI_n - X^{-1}AX) = \Phi_{X^{-1}AX}(t).
\end{aligned}$$

□

4.2　一次独立

対角化可能性について掘り下げるにあたって，まず前回勉強した対角化可能であることの必要十分条件を思い出そう．

命題 3.1 (再掲)

n 次正方行列 A に対し，以下は同値である．

(1) A は対角化可能．

(2) A の n 個の固有ベクトル $\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_n \in \mathbb{K}^n$ であって，それを並べてできる n 次正方行列 $P = (\boldsymbol{p}_1 \cdots \boldsymbol{p}_n)$ が正則になるようなものが存在する．

この (2) の条件が成り立つかどうかが計算で判定できるようになるのが今回の目標である．このために一つ重

* *e-mail*：hoya@shibaura-it.ac.jp

要な一次独立という概念を導入する．

定義 4.2

$\mathbb{K}^n$ の元の組 $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k$ が**一次独立** (または**線形独立**) であるとは，

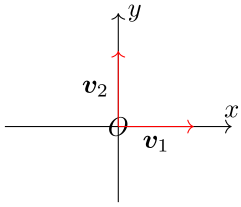
$$c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_k\boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{0},\ c_1, \dots, c_k \in \mathbb{K} \ \Rightarrow\ c_1 = \cdots = c_k = 0$$

が成立することを言う．$\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k$ が一次独立でないとき，$\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k$ は**一次従属** (または**線形従属**) であるという．

例 1. $\mathbb{K}^2$ の元 $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は一次独立である．なぜなら，$c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{0}$ とすると，

$$c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{0} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

より，$c_1 = c_2 = 0$ となるからである．



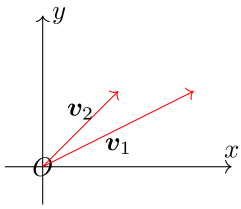
例 2. $\mathbb{K}^2$ の元 $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ は一次独立である．これは以下のように確かめられる．$c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{0}$ とすると，

$$c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{0} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 2c_1 + c_2 \\ c_1 + c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

いま $\det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 1$ なので，一番右の式の両辺に左から $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$ を掛けて，

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

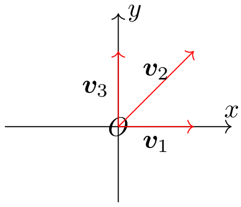
よって，このとき $c_1 = c_2 = 0$.



例 3. $\mathbb{K}^2$ の元 $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は一次従属である．なぜなら，

$$\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{0}$$

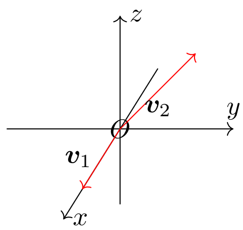
となるので，$c_1 = 1, c_2 = -1, c_3 = 1$ のときに，$c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + c_3\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{0}$ が成立してしまうためである．



例 4. $\mathbb{K}^3$ の元 $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ は一次独立である．なぜなら，$c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{0}$ とすると，

$$c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{0} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

より，$c_1 = c_2 = 0$ となるからである．



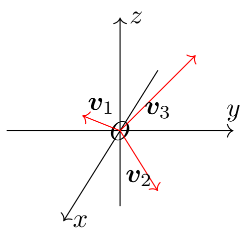
例 5. $\mathbb{K}^3$ の元 $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ は一次独立である．なぜなら，$c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + c_3\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{0}$ とすると，

$$c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + c_3\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{0} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} c_1 + c_2 \\ c_2 + c_3 \\ c_1 + c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

いま $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$ なので，一番右の式の両辺に左から $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$ を掛けて，

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

よって，このとき $c_1 = c_2 = c_3 = 0$.



例 6. $\mathbb{K}^3$ の元 $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_4 = \begin{pmatrix} s \\ t \\ u \end{pmatrix}$ (s, t, u は任意の定数) は一次従属である．なぜなら，

$$c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + c_3\boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} c_1 + c_2 \\ c_2 + c_3 \\ c_1 + c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

となるので，

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} s \\ t \\ u \end{pmatrix}$$

とすれば，

$$a\boldsymbol{v}_1 + b\boldsymbol{v}_2 + c\boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} s \\ t \\ u \end{pmatrix} = \boldsymbol{v}_4.$$

これは，

$$a\boldsymbol{v}_1 + b\boldsymbol{v}_2 + c\boldsymbol{v}_3 - \boldsymbol{v}_4 = \mathbf{0}$$

を意味するので，$c_1 = a, c_2 = b, c_3 = c, c_4 = -1$ のときに $c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + c_3\boldsymbol{v}_3 + c_4\boldsymbol{v}_4 = \mathbf{0}$ が成立してしまうためである．

以上の例を見ると，$\mathbb{K}^n$ においては最大で n 本の一次独立なベクトルが取れるということがイメージされるだろう．この考え方は実際に正しいということをもう少し進んだ線形空間の単元で説明する．線形空間論においては "その空間において一次独立となる最多のベクトルの数" を『次元』を定義するのである．これにより，『$\mathbb{K}^n$ の次元は n である』という直感に合う文章に厳密な定義を与えることができるようになる．

さて，対角化可能性の判定の話に戻ろう．一次独立性は次のように行列の正則性と関係している：

命題 4.3

n 次正方行列 P に対し，P の i 列目の列ベクトルを $\boldsymbol{p}_i$ と書くことにする (つまり，$P = (\boldsymbol{p}_1 \cdots \boldsymbol{p}_n)$)．このとき，以下は同値である．

(1) P は正則．

(2) $\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_n$ は一次独立．

証明． (1) $\Rightarrow$ (2) :P が正則のとき，P^{-1} が存在して $P^{-1}P = I_n$ となるが，この式を列ごとに見ると，

$$(P^{-1}\boldsymbol{p}_1 \ P^{-1}\boldsymbol{p}_2 \cdots P^{-1}\boldsymbol{p}_n) = (\boldsymbol{e}_1 \ \boldsymbol{e}_2 \cdots \boldsymbol{e}_n)$$

となる．よって，両辺を比べると，$i = 1, \ldots, n$ に対して，

$$P^{-1}\boldsymbol{p}_i = \boldsymbol{e}_i$$

であることがわかる．これより，$c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{K}$ に対し，

$$c_1\boldsymbol{p}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{p}_n = \mathbf{0}$$

が成立すると仮定すると，両辺に左から P^{-1} をかけて，

$$\mathbf{0} = c_1P^{-1}\boldsymbol{p}_1 + \cdots + c_nP^{-1}\boldsymbol{p}_n = c_1\boldsymbol{e}_1c_n + \cdots + c_n\boldsymbol{e}_n = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

となる．よって，$c_1 = \cdots = c_n = 0$．これより，$\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_n$ は一次独立．

(2) $\Rightarrow$ (1) :P が正則でない，つまり $\det(P) = 0$ であると仮定して矛盾を導く．P の転置行列 ${}^tP = \begin{pmatrix} {}^t\boldsymbol{p}_1 \\ {}^t\boldsymbol{p}_2 \\ \vdots \\ {}^t\boldsymbol{p}_n \end{pmatrix}$ を考える (つまり，これは i 行目が行ベクトル ${}^t\boldsymbol{p}_i$ となるような n 次正方行列)．

行列式の性質から $\det({}^tP) = \det(P) = 0$ となるので，${}^tP$ も正則ではなく，$\mathrm{rank}(P) < n$ となる．これより，${}^tP$ に行基本変形を繰り替えし行うことで，全ての成分が 0 となる行を第 n 行に持つ行列を作ることができる．行基本変形を繰り返し行う操作はある正則行列 Q を左からかける操作で実現されたということを思い出すと (線形代数 I の内容．忘れていた方は証明の後の注意参照．)，これはある正則行列 Q によって，

$$Q^tP = \begin{pmatrix} * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \tag{4.1}$$

となる ($*$ には適当な数字が入る) ということを言っている．ここで，Q の第 n 行目を $(q_{n1} \ q_{n2} \ \cdots q_{nn})$ と書くと，Q^tP の第 n 行は

$$q_{n1}{}^t\boldsymbol{p}_1 + q_{n2}{}^t\boldsymbol{p}_2 + \cdots + q_{nn}{}^t\boldsymbol{p}_n$$

と表されるので，(4.1) より，

$$q_{n1}{}^t\boldsymbol{p}_1 + q_{n2}{}^t\boldsymbol{p}_2 + \cdots + q_{nn}{}^t\boldsymbol{p}_n = (0, \ldots, 0)$$

となることがわかる．両辺転置をすると，

$$q_{n1}\boldsymbol{p}_1 + q_{n2}\boldsymbol{p}_2 + \cdots + q_{nn}\boldsymbol{p}_n = \mathbf{0}.$$

いま $\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_n$ は一次独立であると仮定しているので，このとき

$$q_{n1} = q_{n2} = \cdots = q_{nn} = 0$$

となるが，これは Q が正則であるということに矛盾する．よって，背理法より P は正則である． □

注意 1. 命題 4.3 の (2) $\Rightarrow$ (1) の証明においては P を転置した行列を考えているが，もし「列基本変形」および「列基本変形が正則行列を右からかけることで実現される」ということを知っている人がいれば，転置を考えずに直接列基本変形を用いて証明を行えばよい．

また，行基本変形がある正則行列を左からかける操作で実現されるというのは以下のような話であった．ここでは例で思い出すに留める．一般的な話は清水先生の線形代数 I の講義資料を参照のこと．

(I) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ の 1 行目に 3 行目の t 倍を加えると，$\begin{pmatrix} 1+7t & 2+8t & 3+9t \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ であるが，これは

$$\begin{pmatrix} 1+7t & 2+8t & 3+9t \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

より，左から正則行列 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ をかける操作ととらえることができる．

(II) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ の 2 行目を t 倍 $(t \neq 0)$ すると，$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4t & 5t & 6t \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ であるが，これは

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4t & 5t & 6t \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

より，左から正則行列 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ をかける操作ととらえることができる．

(III) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ の 2 行目と 3 行目を入れ替えると，$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ であるが，これは

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

より，左から正則行列 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ をかける操作ととらえることができる．

命題 4.3 より，命題 3.1 は次のように言い換えられることがわかる：

定理 4.4

n 次正方行列 A に対し，以下は同値である．

(1) A は対角化可能．

(2) A は一次独立な n 個の固有ベクトル $\boldsymbol{p}_1, \dots, \boldsymbol{p}_n \in \mathbb{K}^n$ を持つ．

さらに固有ベクトルの一次独立性については次がわかる．

定理 4.5

$\boldsymbol{p}_1, \dots, \boldsymbol{p}_k \in \mathbb{K}^n$ を n 次正方行列 A の固有ベクトルで，対応する固有値が互いに異なるものとする．このとき，$\boldsymbol{p}_1, \dots, \boldsymbol{p}_k$ は一次独立である．

証明. $\boldsymbol{p}_i$ に対応する固有値を λ_i と書く．つまり，

$$A\boldsymbol{p}_i = \lambda_i \boldsymbol{p}_i$$

とする．このとき仮定から，$i \neq j$ ならば，$\lambda_i \neq \lambda_j$ であることに注意する．いま，$c_1, \dots, c_k \in \mathbb{K}$ に対し，

$$c_1\boldsymbol{p}_1 + \cdots + c_k\boldsymbol{p}_k = \boldsymbol{0} \tag{4.2}$$

が成立すると仮定する．このとき，$c_1 = \cdots = c_k = 0$ となることを示せばよい．(4.2) の両辺に左から A をかけると，

$$\begin{aligned} & c_1A\boldsymbol{p}_1 + \cdots + c_kA\boldsymbol{p}_k = A\boldsymbol{0} \\ \Leftrightarrow\quad & c_1\lambda_1\boldsymbol{p}_1 + \cdots + c_k\lambda_k\boldsymbol{p}_k = \boldsymbol{0}. \end{aligned}$$

となる．次に，今得られた式の両辺にさらに左から A をかけると，

$$\begin{aligned} & c_1\lambda_1A\boldsymbol{p}_1 + \cdots + c_k\lambda_kA\boldsymbol{p}_k = A\boldsymbol{0} \\ \Leftrightarrow\quad & c_1\lambda_1^2\boldsymbol{p}_1 + \cdots + c_k\lambda_k^2\boldsymbol{p}_k = \boldsymbol{0}. \end{aligned}$$

このように，得られた式にさらに左から A をかけるという操作を上のように $k-1$ 回繰り返すと，

$$c_1\lambda_1^i\boldsymbol{p}_1 + \cdots + c_k\lambda_k^i\boldsymbol{p}_k = \boldsymbol{0}, \qquad i = 0, 1, \dots, k-1$$

となることがわかる．これらの式は行列を用いて次のようにあらわすことができる．

$$\begin{pmatrix} c_1\boldsymbol{p}_1 & c_2\boldsymbol{p}_2 & \cdots & c_k\boldsymbol{p}_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{k-1} \\ 1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_2^{k-1} \\ 1 & \lambda_3 & \cdots & \lambda_3^{k-1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & \lambda_k & \cdots & \lambda_k^{k-1} \end{pmatrix} = O_k. \tag{4.3}$$

(O_k は $k \times k$ 零行列．) ここで，ファンデルモンド行列式 (Vandermonde determinant) の公式より，

$$\det \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{k-1} \\ 1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_2^{k-1} \\ 1 & \lambda_3 & \cdots & \lambda_3^{k-1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & \lambda_k & \cdots & \lambda_k^{k-1} \end{pmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq k} (\lambda_j - \lambda_i)$$

となる (この公式の証明をここですると寄り道が長くなるのでここでは行わない．清水先生の線形代数 I の講義資料を復習すること．また，忘れた方のために，この講義でも補足プリントとして証明を別途配布する．)．

ここで，いま仮定から $i \neq j$ ならば，$\lambda_i \neq \lambda_j$ であったので，上のファンデルモンド行列式の値は 0 ではない．

よって，$\begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{k-1} \\ 1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_2^{k-1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & \lambda_k & \cdots & \lambda_k^{k-1} \end{pmatrix}^{-1}$ が存在するので，これを (4.3) の両辺に右からかけて，

$$(c_1\boldsymbol{p}_1 \ c_2\boldsymbol{p}_2 \ \cdots \ c_k\boldsymbol{p}_k) = O_k.$$

いま，$\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_k$ は固有ベクトルなので特に零ベクトルではないから，このとき $c_1 = c_2 = \cdots = c_k = 0$． □

以上でわかったことをまとめよう：

定理 4.5 は『異なる固有値に対応する固有空間から ($\mathbf{0}$ でない) 固有ベクトルを選んでくるとそれらは自動的に一次独立になる』とも言える．このことから定理 4.4 とも合わせて次のことが直ちに言える：

定理 4.6

n 次正方行列 A が n 個の相異なる固有値を持つとき，A は対角化可能である．

以下では，$\mathbb{K} = \mathbb{C}$ とする．このとき，複素数の範囲では任意の n 次多項式 $f(t)$ に対し，$f(t) = 0$ が重複も込めて n 個の解を持つということに注意しよう．

n 次正方行列 A が n 個の相異なる固有値を持つというのは，A の固有方程式

$$\Phi_A(t) = 0$$

が重解を持たず，n 個の互いに異なる解を持つということである．

これより，対角化可能性が問題になるのは，$\Phi_A(t) = 0$ が重解を持つときである．一般に A の固有多項式 $\Phi_A(t)$ が

$$\Phi_A(t) = (t - \lambda_1)^{m_1} \cdots (t - \lambda_k)^{m_k}$$

(ただし，$\lambda_i \in \mathbb{C}$ で，$i \neq j$ のとき，$\lambda_i \neq \lambda_j$．各 m_i は正の整数で，$\sum_{i=1}^{k} m_i = n$．) と分解されたとしよう．定理 3.4 より，A が対角化であるとすると，その結果の対角成分には λ_i が m_i 個 $(i = 1, \ldots, k)$ 現れる．よって，定理 4.4，4.5 から，A が対角化可能であるということは，

各固有空間 $V(\lambda_i)$ から m_i本の一次独立なベクトルを選んでくることができる

ということと同値である．さらに，これは各 $i = 1, \ldots, k$ について，

各 $i = 1, \ldots, k$ について，連立一次方程式 $(\lambda_i I_n - A)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の解の自由度が m_i

ということと同値である[*1]．以上を全て踏まえると，n 次正方行列 A の対角化は対角化可能性の判定も含め，以下のアルゴリズムで行えることがわかる．ただし，一般的な記号がわかりにくいという場合には一度飛ばして，この下の例を参照してほしい．

(Step 1) A の固有方程式 $\Phi_A(t) = 0$ の解を重複度込みで求める．この解を λ_1(重複度 m_1)$, \ldots, \lambda_k$(重複度 m_k) とする ($\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ は相異なるとする)．$\Phi_A(t)$ は t に関する n 次式なので，$m_1 + \cdots + m_k = n$ に注意する．

(Step 1') $m_1 = \cdots = m_k = 1$ のとき (つまり $\Phi_A(t) = 0$ が重解を持たないとき)，この時点で A は対角化可能であることがわかり，対角化の結果得られる対角行列は，

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

である．(このとき $k = n$ であることに注意．)

[*1] この同値性は感覚的には認めていただけると思うが，厳密に証明しようとするともう少し議論が必要である．これは必要以上のややこしさを含むように思われるので，今後補足プリントで解説する．

(Step 2) 各 λ_i $(i=1,\dots,k)$ に対して，$x_1,\dots,x_n$ に関する連立一次方程式

$$(\lambda_i I_n - A)\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$$

を考え，この解を求める．固有値の定義より，これは少なくとも 1 つ以上の任意パラメータを含む以下の形の一般解を持つ：

$$\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=c_1\boldsymbol{p}_1^{(i)}+\cdots+c_{\ell_i}\boldsymbol{p}_{\ell_i}^{(i)}\quad(\boldsymbol{p}_1^{(i)},\dots,\boldsymbol{p}_{\ell_i}^{(i)}\in\mathbb{K}^n, c_1,\dots,c_{\ell_i}\text{は任意パラメータ})$$

ここで，任意パラメータは必要十分な数入っている，つまり $\ell_i = n-\operatorname{rank}(\lambda_i I_n - A)$ であるとする．実はこのとき，$\boldsymbol{p}_1^{(i)},\dots,\boldsymbol{p}_{\ell_i}^{(i)}$ は一次独立となる．

(Step 3) ある i が存在して，$\ell_i\neq m_i$ となるとき (実はこのとき $\ell_i<m_i$ である)，A は対角化不可能である．一方，そうならないとき，つまり，全ての i に対して $\ell_i=m_i$ となるとき，A は対角化可能である．

(Step 4) A が対角化可能であるとき (つまり，全ての i に対して $\ell_i=m_i$ となるとき)，

$$P\coloneqq(\boldsymbol{p}_1^{(1)}\cdots\boldsymbol{p}_{m_1}^{(1)}\ \boldsymbol{p}_1^{(2)}\cdots\boldsymbol{p}_{m_2}^{(2)}\ \cdots\ \boldsymbol{p}_1^{(k)}\cdots\boldsymbol{p}_{m_k}^{(k)})$$

とすると，P は n 次正則行列であり，

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1&0&0&0&0&0&0\\ 0&\ddots&0&0&0&0&0\\ 0&0&\lambda_1&0&0&0&0\\ &\cdots&&\ddots&&\cdots&\\ 0&0&0&0&\lambda_k&0&0\\ 0&0&0&0&0&\ddots&0\\ 0&0&0&0&0&0&\lambda_k\end{pmatrix}\quad(\lambda_1\text{が }m_1\text{個},\lambda_2\text{が }m_2\text{個},\dots,\lambda_k\text{が }m_k\text{個})$$

となる．

例 7. $A=\begin{pmatrix}5&2&4\\ -4&-1&-4\\ -4&-2&-3\end{pmatrix}$ の対角化を考えてみる．A の固有多項式は，

$$\begin{aligned}\Phi_A(t)&=\left|\begin{pmatrix}t-5&-2&-4\\ 4&t+1&4\\ 4&2&t+3\end{pmatrix}\right|\\ &=(t-5)(t+1)(t+3)+(-32)+(-32)-8(t-5)-(-8)(t+3)-(-16)(t+1)\\ &=(t+1)(t-1)^2\end{aligned}$$

となるので，A の固有値は $-1,1$(重複度 2) である．

固有値 1 に対する固有ベクトルを求める．x_1,x_2,x_3 に関する連立一次方程式

$$(I_3-A)\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4&-2&-4\\ 4&2&4\\ 4&2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

を解くと，

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}1\\ -2\\ 0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}0\\ -2\\ 1\end{pmatrix}\quad(c_1,c_2\text{は任意パラメータ})$$

となるので，固有値 1 に対する一次独立な固有ベクトルの組として，$\begin{pmatrix}1\\ -2\\ 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\ -2\\ 1\end{pmatrix}$ が取れる．

固有値 -1 に対する固有ベクトルを求める．x_1, x_2, x_3 に関する連立一次方程式

$$(-I_3 - A)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -2 & -4 \\ 4 & 0 & 4 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を解くと，

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (c \text{ は任意パラメータ})$$

となるので，固有値 -1 に対する固有ベクトルの 1 つは，$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ と取れる．

これより A は対角化可能で，

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

とすると，

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

となる．

例 8. $A_= \begin{pmatrix} 4 & 4 & -3 \\ 3 & -1 & -9 \\ 5 & 3 & -7 \end{pmatrix}$ の対角化を考えてみる．A の固有多項式は，

$$\begin{aligned} \Phi_A(t) &= \left| \begin{pmatrix} t-4 & -4 & 3 \\ -3 & t+1 & 9 \\ -5 & -3 & t+7 \end{pmatrix} \right| \\ &= (t-4)(t+1)(t+7) + 180 + 27 - (-27)(t-4) - 12(t+7) - (-15)(t+1) \\ &= (t+1)^2(t+2) \end{aligned}$$

となるので，A の固有値は -1(重複度 2), -2 である．

固有値 -1 に対する固有ベクトルを考える．x_1, x_2, x_3 に関する連立一次方程式

$$(-I_3 - A)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -4 & 3 \\ -3 & 0 & 9 \\ -5 & -3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を解くと，

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (c \text{ は任意パラメータ})$$

となるので，固有値 -1 の重複度は 2 であるにも関わらず，固有値 -1 に対する 2 本の一次独立な固有ベクトルは存在しない．よって，A は対角化不可能である．