線形代数 II 第 8 回講義資料

担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)*

今回は対角化に関する一連の講義の最終回として，対角化の 2 次形式の分類への応用について述べる[*1]．

8.1 2 次形式

定義 8.1

n 個の変数 $x_1, \dots, x_n$ に関する実数係数の 2 次斉次式[*2]のことを，**(実)2 次形式**という．つまり，具体的には，二次形式はある $a_{ij} \in \mathbb{R}(1 \leq i \leq j \leq n)$ を用いて，

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + \sum_{i<j}^{n} a_{ij}x_ix_j$$

という形で書ける式のことを (実)2 次形式という．

特に 2 変数，3 変数 (つまり $n = 2, 3$) の場合の 2 次形式を考えてみよう．これはそれぞれ，

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{12}x_1x_2$$
$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + a_{23}x_2x_3$$

という多項式のことである．特に $n = 2$ の場合に $a = a_{11}, b = a_{12}, c = a_{22}, x = x_1, y = x_2$ と書くことにすると，x, y に関する多項式

$$ax^2 + bxy + cy^2$$

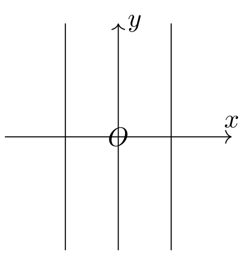
は高校以来馴染みのある多項式であろう．例えば，2 次形式を用いて以下のような図形を表すことができる．

例 1 ($n = 2$ の場合，2 次曲線)**.** 2 次形式 $ax^2 + bxy + cy^2$ に対し，

$$ax^2 + bxy + cy^2 = 1$$

とすると，これは xy-平面内の 2 次曲線と呼ばれる曲線を表す．

まず最も単純な場合として，$x^2 = 1(a = 1, b = 0, c = 0)$ という場合を見てみよう．これは，「$x = 1$ 又は $x = -1$」と同値なので，以下のような 2 直線を表す．

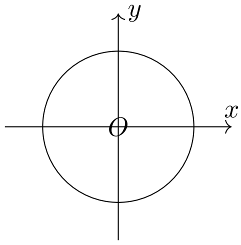


次に $x^2 + y^2 = 1(a = c = 1, b = 0)$ を考えてみると，これは xy-平面内では半径 1 の円を表す．

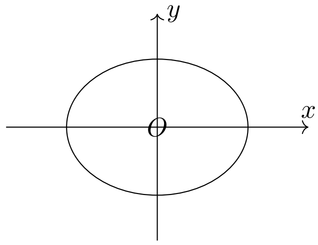
* *e-mail*：hoya@shibaura-it.ac.jp

*1 次回以降は線形空間論の基礎の内容を扱う．それが順調に進んでもしさらに時間があれば，最終回周辺で再度対角化の更なる応用について解説を行う可能性もある．

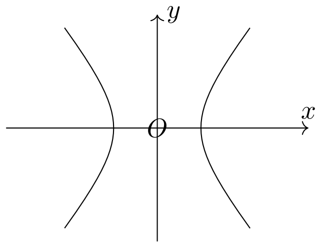
*2 斉次式とは全ての項の次数が全て同じ多項式のこと．今の場合は全ての項の次数が 2 である式を考えている．



より一般に $a > 0$ かつ $c > 0$ のとき，$ax^2 + cy^2 = 1$ は xy-平面内では以下のような楕円を表す．



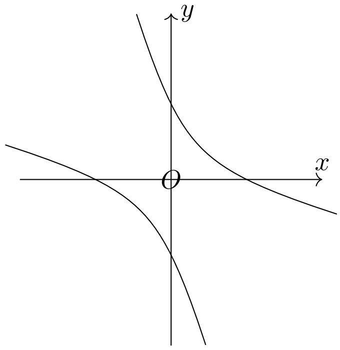
また，$a > 0, c < 0$ のとき，$ax^2 + cy^2 = 1$ は xy-平面内では以下のような双曲線を表す．



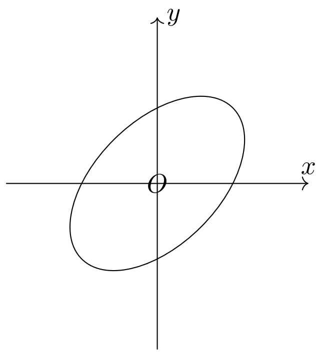
$a < 0, c > 0$ のときは，x と y の役割をいれかえて，この 曲線を $90°$ 回したような曲線になる．

　$b = 0$ の場合の最後として，$a \leq 0, c \leq 0$ のときを考えると，$ax^2 + cy^2 = 1$ の左辺は $\mathbb{R}^2$ 内では正の値を取らないので，$\mathbb{R}^2$ においてこれを満たす点は空集合となる．

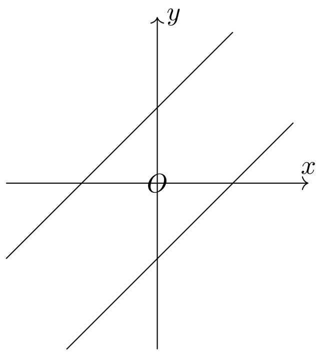
　それでは，xy の項がある場合 $(b \neq 0)$ にはグラフの概形はどうなるだろうか．例えば，$x^2 + 4xy + y^2 = 1$ は以下のように双曲線を回転させたグラフになる．



一方，関数の見た目は同じようでも $x^2 - xy + y^2 = 1$ は以下のように楕円を回転させたグラフになる．



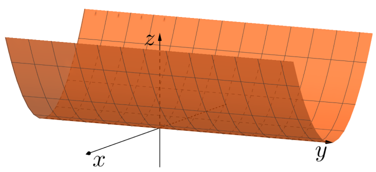
さらに，$x^2 - 2xy + y^2 = 1$ は以下のように 2 本の平行な直線となる．

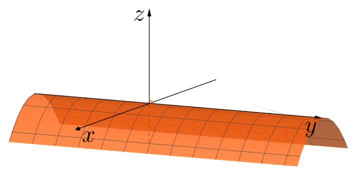


このように，多項式の見た目はほぼ同じでもそのグラフの形は様々である．実は一般に $ax^2 + bxy + cy^2 = 1$ のグラフは，2 本の平行な直線，楕円 (円を含む)，双曲線，空集合のいずれかの形をしている．今回はこのことを対角化の理論を応用して示す (定理 8.3)．

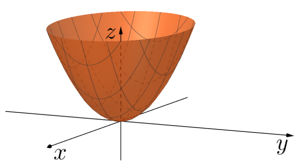
例 2 ($n = 2$ の場合，2 次曲面)．例 1 では $ax^2 + bxy + cy^2 = 1$ という 2 次曲線の概形を見たが，xyz-空間内での 2 次曲面 $z = ax^2 + bxy + cy^2$ の概形も重要であるのでここに書いておこう[*3]．以下は $b = 0$ の場合の曲面の概形である．何故このようになるかすぐにはわからないという方も，一旦 x, y, z のいずれかの値を様々に固定してみることで，曲面の切断面が描けて概形が想像できるだろう．

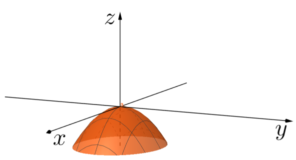
- 放物柱面：$z = ax^2$ (左：$a > 0$，右：$a < 0$)：





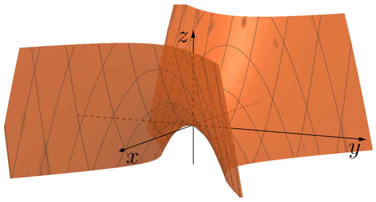
- 楕円放物面：$z = ax^2 + cy^2$ (左：$a > 0, c > 0$，右：$a < 0, c < 0$)：





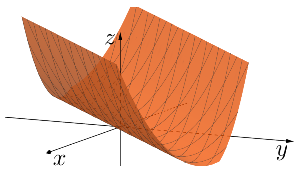
[*3] ここでの絵は GeoGebra というアプリを用いて書いたものである．Web 上で無料で簡単に使えるので，遊んでみると良い．URL：`https://www.geogebra.org/`

- 双曲放物面：$z = ax^2 + cy^2$ $(a > 0, c < 0,)$：

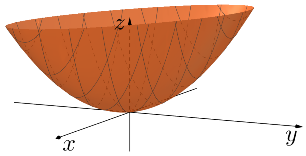


以下で対角化の理論を応用することで，2 次曲面 $z = ax^2 + bxy + cy^2$ の概形は必ず上に挙げた $b = 0$ の場合のいずれかの曲面を z 軸周りに回転させて得られるものとなるということを証明する (定理 8.3)．つまり，言い換えれば 2 次曲面の本質的な形は上に挙げたもので全てであることがわかる．以下が例である．

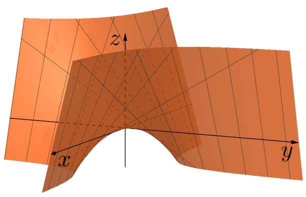
- $z = x^2 - 2xy + y^2$ (上の $a > 0, c = 0$ の場合のものを回転させた形)：



- $z = 2x^2 + 4xy + 3y^2$ (上の $a > 0, c > 0$ の場合のものを回転させた形)：



- $z = xy$ (上の $a > 0, c < 0$ の場合のものを回転させた形)：



2 次形式で定められる曲面

$$z = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + \sum_{i<j}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

を考えたとき，概形を知るうえで難しい部分は $\sum_{i<j}^{n} a_{ij} x_i x_j$ の部分である．実際，例 1, 2 でも『xy』の部分が無ければ “回転していなくて綺麗” なグラフが得られていた．変数を 1 つ増やして 3 変数の場合にもこの様子を見ておこう．$\mathbb{R}^4$ の中で

$$z = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \text{ と } z = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$$

を比べてみる．このとき，$x_3 = 0, 1, 2$ と動かしてみると，前者は

$$z = x_1^2 + x_2^2, \quad z = x_1^2 + x_2^2 + 1, \quad z = x_1^2 + x_2^2 + 4$$

と単に z 方向への平行移動の形で変わっていくのに対し，後者は

$$z = x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2, \quad z = x_1^2 + x_2^2 + 1 + x_1x_2 + x_1 + x_2, \quad z = x_1^2 + x_2^2 + 4 + x_1x_2 + 2x_1 + 2x_2$$

というように関数が単に z 方向の平行移動ではない形で変わっていく．この違いが $\sum_{i<j}^n a_{ij}x_ix_j$ の部分が無いと “回転していなくて綺麗” になるという事実に対応している．

今から述べたいことは $x_1, \dots, x_n$ という座標の取り方を変えると $\sum_{i<j}^n a_{ij}x_ix_j$ の部分が消せるということである．(つまり，2 次形式に合うように座標の方を “回転させる” のである！)

2 次形式

$$\sum_{i=1}^n a_{ii}x_i^2 + \sum_{i<j}^n a_{ij}x_ix_j$$

に対して，以下の n 次実対称行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \frac{a_{12}}{2} & \cdots & \frac{a_{1n}}{2} \\ \frac{a_{12}}{2} & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \frac{a_{n-1n}}{2} \\ \frac{a_{1n}}{2} & \cdots & \frac{a_{n-1n}}{2} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

を考える．つまり，A の (i, j) 成分は

$$\begin{cases} a_{ii} & i = j \text{ のとき}, \\ a_{ij}/2 & i < j \text{ のとき}, \\ a_{ji}/2 & i > j \text{ のとき}, \end{cases}$$

である．このとき，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ とすると，

$$\sum_{i=1}^n a_{ii}x_i^2 + \sum_{i<j}^n a_{ij}x_ix_j = {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}$$

と書けることが計算によりわかる (わかりにくい場合には以下の例 3，4 を先に見るとイメージがつかめるだろう)．ここで，A は n 次実対称行列なので，第 6 回講義資料定理 6,4 より，ある実直交行列 U が存在して，

$${}^tUAU = U^{-1}AU = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}, \text{ ただし}, \lambda_1, \dots, \lambda_n \text{は実数}$$

というように対角化できる．これより，

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = \boldsymbol{x}' = U^{-1}\boldsymbol{x} \ \Leftrightarrow \ \boldsymbol{x} = U\boldsymbol{x}'$$

とおくと，

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n a_{ii}x_i^2 + \sum_{i<j}^n a_{ij}x_ix_j &= {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x} \\ &= {}^t(U\boldsymbol{x}')AU\boldsymbol{x}' \\ &= {}^t\boldsymbol{x}'{}^tUAU\boldsymbol{x}' \\ &= (x_1' \ \cdots \ x_n') \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} \\ &= \lambda_1(x_1')^2 + \lambda_1(x_2')^2 + \cdots + \lambda_n(x_n')^2 \end{aligned}$$

となる．ここで最後の式は『$\sum_{i<j}^n a_{ij}x_ix_j$ の部分』がなくなっていることに注意しよう．これを 2 次形式の標準形という．ここでの結果を定理の形でまとめておこう．

定理 8.2

A を n 次実対称行列とし，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ として，2 次形式 ${}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}$ を考える．このとき，A を対角化する実直交行列 U が存在して，$\boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = U^{-1}\boldsymbol{x}$ とおくと，

$$
{}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x} = \lambda_1(x'_1)^2 + \lambda_2(x'_2)^2 + \cdots + \lambda_n(x'_n)^2
$$

となる．ただし，$\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ は

$$
U^{-1}AU = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}
$$

を満たす実数 (A の固有値).

この定理の意味を考えてみよう．U の第 i 列目の列ベクトルを $\boldsymbol{u}_i$ と書くことにする (つまり $U = (\boldsymbol{u}_1 \ \cdots \boldsymbol{u}_n)$) と，$\boldsymbol{x} = U\boldsymbol{x}'$ より，

$$
\boldsymbol{x} = x'_1\boldsymbol{u}_1 + x'_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + x'_n\boldsymbol{u}_n
$$

となる．ここで，第 5 回講義資料 p.2 の考え方を思い出すと，これは正規直交基底 $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$ をもとに $\mathbb{R}^n$ の "新たな座標" を考えたとき，$\mathbb{R}^n$ の $\boldsymbol{x}$ が新たな座標では $\boldsymbol{x}'$ に対応するということを言っている．つまり，定理 8.2 はどんな 2 次形式も適切に座標を取り直してみれば標準形に見えるということを言っている．

$n = 2$ の場合を再び考えてみよう．2 次実直交行列は $\mathbb{R}^2$ 内の正規直交基底を並べてできる行列なので，図形的に考えてみれば明らかであるように[*4]，

$$
\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \text{ 又は } \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \quad (\theta \in \mathbb{R})
$$

のいずれかの形をしている．特に 2 つめのものは 1 つめのものの第 2 列を -1 倍しただけなので，2 つめのものが実対称行列 A を対角化するとき，1 つめものも A を対角化する (なぜなら，2 つめの 2 列目が A の固有ベクトルであるとき，1 つめの 2 列目もそうであるからである)．よって，2 次の場合実対称行列 A は必ず $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ $(\theta \in \mathbb{R})$ という形の行列で対角化できる．これは，2 次形式

$$
(x \quad y)\, A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}
$$

は $\mathbb{R}^2$ 内の x 軸，y 軸をそれぞれ θ 回転させた座標軸で見ると標準形となるということを言っている．さらに A の固有値を λ_1, λ_2 とすると，その標準形は

$$
\lambda_1(x'_1)^2 + \lambda_2(x'_2)^2
$$

という形をしており，例 1，2 で見たように，$\lambda_1(x'_1)^2 + \lambda_2(x'_2)^2 = 1$ や $z = \lambda_1(x'_1)^2 + \lambda_2(x'_2)^2$ の概形は λ_1, λ_2 の符号のみで決まっている．よって，A の固有値の符号がわかれば $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1$，あるいは

[*4] もちろん計算で示しても容易に示せる．

$z = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ の概形もわかるということになる．以上を例で見てみよう．

例 3. 2 次形式 $x^2+4xy+y^2$ を考える．このとき，実対称行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

を考えると，

$$x^2+4xy+y^2 = (x \quad y)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

である．ここで，A を対角化する実直交行列を第 7 回講義資料の方法で求めよう． A の固有多項式は，

$$\begin{aligned}\Phi_A(t) &= \left|\begin{pmatrix} t-1 & -2 \\ -2 & t-1 \end{pmatrix}\right| \\ &= (t-1)^2-(-2)^2 = (t+1)(t-3)\end{aligned}$$

となるので，A の固有値は $-1, 3$ である．

固有値 -1 の固有ベクトルを求める．x_1, x_2 に関する連立一次方程式

$$(-I_2 - A)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を解くと，

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (c \text{ は任意パラメータ})$$

となるので，固有値 -1 に対する固有ベクトルの 1 つとして，$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ が取れる．これに対して，グラム・シュミットの直交化法を適用するというのは大きさを 1 にするということになるので，

$$\boldsymbol{u}_1 := \frac{1}{\sqrt{(-1)^2+1^2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

が取るべきベクトルであることがわかる．

次に固有値 3 の固有ベクトルを求める．x_1, x_2 に関する連立一次方程式

$$(3I_2 - A)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を解くと，

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (c \text{ は任意パラメータ})$$

となるので，固有値 3 に対する固有ベクトルの 1 つとして，$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ が取れる．これに対して，グラム・シュミットの直交化法を適用するというのは大きさを 1 にするということになるので，

$$\boldsymbol{u}_2 := \frac{1}{\sqrt{1^2+1^2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

が取るべきベクトルであることがわかる．

以上より，

$$U := (\boldsymbol{u}_1\ \boldsymbol{u}_2) = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\pi/4) & -\sin(-\pi/4) \\ \sin(-\pi/4) & \cos(-\pi/4) \end{pmatrix}$$

とすると，U は実直交行列で ${}^tUAU = U^{-1}AU = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ となる．

よって，

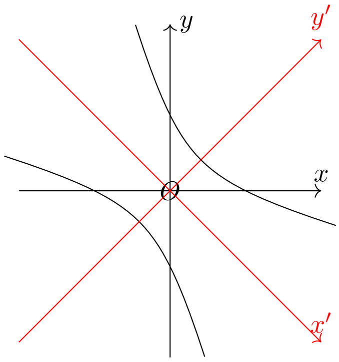
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = U^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\pi/4) & \sin(-\pi/4) \\ -\sin(-\pi/4) & \cos(-\pi/4) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\pi/4)x + \sin(-\pi/4)y \\ -\sin(-\pi/4)x + \cos(-\pi/4)y \end{pmatrix}$$

とおくと，

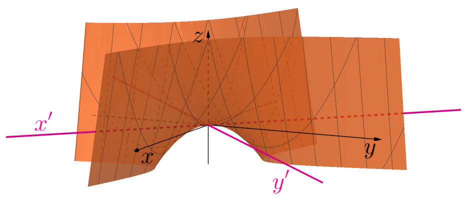
$$x^2 + 4xy + y^2 = -(x')^2 + 3(y')^2$$

となる．これは，x 軸，y 軸をそれぞれ $-\pi/4$ 回転させた新しい座標軸を考えると，その座標軸ではこの二次形式は $-(x')^2+3(y')^2$ に見えるということを言っている．実際に $-(x')^2+3(y')^2 = 1$，および $z = -(x')^2+3(y')^2$ というグラフを考えてみると以下のようになる．

- $-(x')^2 + 3(y')^2 = x^2 + 4xy + y^2 = 1$：



- $z = -(x')^2 + 3(y')^2 = x^2 + 4xy + y^2$：



例 4. 2 次形式 $x^2 - xy + y^2$ を考える．このとき，実対称行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

を考えると，

$$x^2 - xy + y^2 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

である．ここで，A を対角化する実直交行列を第 7 回講義資料の方法で求めると (長いので計算は略．各自試してほしい．)，

$$U := \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\pi/4) & -\sin(\pi/4) \\ \sin\quad(\pi/4) & \cos(\pi/4) \end{pmatrix}$$

としたとき，${}^tUAU = U^{-1}AU = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 3/2 \end{pmatrix}$ となる．

よって，

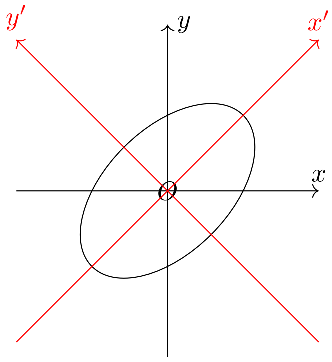
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = U^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\pi/4) & \sin(\pi/4) \\ -\sin(\pi/4) & \cos(\pi/4) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\pi/4)x + \sin(\pi/4)y \\ -\sin(\pi/4)x + \cos(\pi/4)y \end{pmatrix}$$

とおくと，

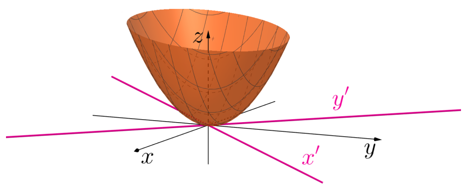
$$x^2 - xy + y^2 = \frac{1}{2}(x')^2 + \frac{3}{2}(y')^2$$

となる．これは，x 軸，y 軸をそれぞれ $\pi/4$ 回転させた新しい座標軸を考えると，その座標軸ではこの二次形式は $\frac{1}{2}(x')^2+\frac{3}{2}(y')^2$ に見えるということを言っている．実際に $\frac{1}{2}(x')^2+\frac{3}{2}(y')^2=1$，および $z=\frac{1}{2}(x')^2+\frac{3}{2}(y')^2$ というグラフを考えてみると以下のようになる．

- $\frac{1}{2}(x')^2+\frac{3}{2}(y')^2=x^2-xy+y^2=1$：



- $z=\frac{1}{2}(x')^2+\frac{3}{2}(y')^2=x^2-xy+y^2$：



以上の概形の考察を定理の形でまとめておこう．

定理 8.3

実 2 次形式 $B(x,y)=ax^2+bxy+cy^2$(ただし，$a=b=c=0$ ではないとする) に対して，

$$A=\begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix}$$

とする．A は実対称行列なので実数の固有値 λ_1,λ_2(ただし，$\lambda_1\geq\lambda_2$ とする) を持つが，その符号によって以下が言える：

(i) $\lambda_1>0,\lambda_2=0$ のとき，$B(x,y)=1$ は 2 本の平行な直線，$z=B(x,y)$ は下に凸な放物柱面となる．

(i)$'$ $\lambda_1=0,\lambda_2<0$ のとき，$B(x,y)=1$ は空集合，$z=B(x,y)$ は上に凸な放物柱面となる．

(ii) $\lambda_1>0,\lambda_2>0$ のとき，$B(x,y)=1$ は楕円，$z=B(x,y)$ は下に凸な楕円放物面となる．

(ii)$'$ $\lambda_1<0,\lambda_2<0$ のとき，$B(x,y)=1$ は空集合，$z=B(x,y)$ は上に凸な楕円放物面となる．

(iii) $\lambda_1>0,\lambda_2<0$ のとき，$B(x,y)=1$ は双曲線，$z=B(x,y)$ は双曲放物面となる．

このように，2 次形式の標準形において，対応する実対称行列の符号は特に重要な意味を持つ．一般に，A を n 次実対称行列とし，$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ として，2 次形式 $B(\boldsymbol{x})={}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}$ を考え，その標準形が

$$\lambda_1(x_1')^2+\lambda_2(x_2')^2+\cdots+\lambda_n(x_n')^2$$

となったとき，$\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ の中で正のものの数，負のものの数，0 の数を順に p,q,r として，(p,q,r) を 2 次形式 $B(\boldsymbol{x})$ の**符号数**という．例えば，例 3，4 での計算により，$x^2+4xy+y^2$ の符号数は $(1,1,0)$，x^2-xy+y^2 の符号数は $(2,0,0)$ である．

符号数が A の固有値の符号の情報を持っているものであると考えれば以下の命題は容易にわかる．

命題 8.4

A を n 次実対称行列とし，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ として，2 次形式 $B(\boldsymbol{x}) = {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}$ を考える．このとき，$B(\boldsymbol{x})$ の符号数を (p, q, r) とすると，以下が成立する．

(1) $r \geq 1 \Leftrightarrow \det A = 0$.
(2) $p = n, q = r = 0 \Leftrightarrow$「任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ に対し，$B(\boldsymbol{x}) \geq 0$，かつ等号成立は $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ のときのみ」.
(3) $q = n, p = r = 0 \Leftrightarrow$「任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ に対し，$B(\boldsymbol{x}) \leq 0$，かつ等号成立は $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ のときのみ」.

定義 8.5

n 変数 2 次形式 $B(\boldsymbol{x})$ の符号数を (p, q, r) とかく．

(1) $r = 0$ のとき，つまり，対応する実対称行列が正則なとき，$B(\boldsymbol{x})$ は**非退化**であるといい，$r \geq 1$ のとき，$B(\boldsymbol{x})$ は**退化**しているという．
(2) $p = n, q = r = 0$ のとき，$B(\boldsymbol{x})$ は**正定値**であるという．
(3) $q = n, p = r = 0$ のとき，$B(\boldsymbol{x})$ は**負定値**であるという．

定理 8.3 の条件も符号数の言葉を用いれば，

- (i) は符号数が $(1, 0, 1)$ のとき，(i)$'$ は符号数が $(0, 1, 1)$ のとき (いずれも退化している)
- (ii) は符号数が $(2, 0, 0)$ のとき，つまり正定値のとき，
- (ii)$'$ は符号数が $(0, 2, 0)$ のとき，つまり負定値のとき，
- (iii) は符号数が $(1, 1, 0)$ のとき

ということができる．さらに，$n = 2$ の場合には符号数は固有値を具体的に計算しなくてもすぐにわかる．2 次実対称行列を $A = \begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix}$ とすると，A の固有方程式は

$$\Phi_A(t) = \left| \begin{pmatrix} t-a & -b/2 \\ -b/2 & t-c \end{pmatrix} \right| = (t-a)(t-c) - (-b/2)^2 = t^2 - (a+c)t + (ac - (b/2)^2) = 0$$

であり，この 2 解が A の固有値 λ_1, λ_2 である．よって，解と係数の関係から，

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = a + c = \mathrm{Tr}(A) \\ \lambda_1\lambda_2 = ac - (b/2)^2 = \det(A) \end{cases}$$

である (第 3 回講義資料注意 1 参照)．これより，二次形式 $B(x, y) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ に関して，

- 定理 8.3 の (i) $\Leftrightarrow$ 符号数が $(1, 0, 1) \Leftrightarrow \det(A) = 0$ かつ $\mathrm{Tr}(A) > 0$,
- 定理 8.3 の (i)$'$ $\Leftrightarrow$ 符号数が $(0, 1, 1) \Leftrightarrow \det(A) = 0$ かつ $\mathrm{Tr}(A) < 0$,
- 定理 8.3 の (ii) $\Leftrightarrow$ 符号数が $(2, 0, 0) \Leftrightarrow \det(A) > 0$ かつ $\mathrm{Tr}(A) > 0$,
- 定理 8.3 の (ii)$'$ $\Leftrightarrow$ 符号数が $(0, 2, 0) \Leftrightarrow \det(A) > 0$ かつ $\mathrm{Tr}(A) < 0$,
- 定理 8.3 の (iii) $\Leftrightarrow$ 符号数が $(1, 1, 0) \Leftrightarrow \det(A) < 0$,

ということがわかる．以上をまとめると，$ax^2 + bxy + cy^2 = 1$ あるいは，$z = ax^2 + bxy + cy^2$ の形状が知りたければ，対応する実対称行列 $A = \begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix}$ のトレース $\mathrm{Tr}(A)$ と行列式 $\det(A)$ の符号だけ計算すれば良い

ということになる．例えば，$x^2+4xy+y^2$ に対しては，$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ とすると，

$$\det(A)=1^2-2^2=-3<0$$

なので，$x^2+4xy+y^2=1$ は双曲線，$z=x^2+4xy+y^2$ は双曲放物面であることがわかる．(ただし，標準形からどれくらい回転されているかを知るためには対角化に用いる実直交行列を求める必要がある．)

x^2-xy+y^2 に対しては，$A=\begin{pmatrix}1 & -1/2\\ -1/2 & 1\end{pmatrix}$ とすると，

$$\det(A)=1^2-(-1/2)^2=3/4>0 \quad \mathrm{Tr}(A)=1+1=2>0$$

なので，$x^2-xy+y^2=1$ は楕円，$z=x^2-xy+y^2$ は下に凸な楕円放物面であることがわかる．

$x^2-2xy+y^2$ に対しては，$A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ とすると，

$$\det(A)=1^2-(-1)^2=0 \quad \mathrm{Tr}(A)=1+1=2>0$$

なので，$x^2-2xy+y^2=1$ は 2 本の平行な直線，$z=x^2-2xy+y^2$ は下に凸な放物柱面であることがわかる．

微積分学との関係

最後になぜこの 2 次曲面の概形を知ることが大事なのか微積分学で習う 2 変数の極値問題との関係から簡単に述べておこう．無限回微分可能な 2 変数関数 $f(x,y)$ は点 (a,b) の周りで，

$$f(a+s,b+t)\approx f(a,b)+\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)s+\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)t+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)s^2+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a,b)st+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)t^2$$

と近似されるのであった．(“近似される” の正確な意味については 2 変数版のテイラーの定理を思い出すこと．)

ここで，x,y を $\mathbb{R}$ 内で動かしたときの $z=f(x,y)$ の極大，極小値が知りたいとする．まず，極大，極小値をとる点では曲面 $z=f(x,y)$ は “山の頂上” あるいは “凹みの底” となっているはずなので，このような点 (a,b) では

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)=\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)=0 \tag{8.1}$$

となるはずである (正確な議論は微積分学の教科書を参照のこと．1 変数の場合に極大極小値が微分係数 $=0$ の点で見つかったことを思い出せばよい)．そのため，極値問題では (8.1) を満たす点 (a,b) をまず計算する．すると，次は求めた (a,b) が $f(x,y)$ を極大にする点なのか，極小にする点なのか，どちらでもないのかを調べないといけない．ここで，今回の 2 次曲面の概形の考察が役に立つのである．上に述べたように (8.1) を満たす点では，$f(f,y)$ は

$$f(a+s,b+t)\approx f(a,b)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)s^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a,b)st+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)t^2\right)$$

と近似される．ここで，右辺の $f(a,b)$ は定数なので概形には影響してこないため，

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)s^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a,b)st+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)t^2\right)$$

の部分に着目する．すると，これは s,t に関する 2 次形式となっている！ (s,t) は点 (a,b) からの差分を表す値なので，$(s,t)=(0,0)$ の周りで曲面

$$z=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)s^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a,b)st+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)t^2\right) \tag{8.2}$$

がどのようになっているかがわかれば，それが点 (a,b) の周りでの $f(x,y)$ の振る舞いを表していることになる．実際，(8.2) が

(I) 下に凸な楕円放物面となるとき，$f(x,y)$ は (a,b) で極小値をとり，

(II) 上に凸な楕円放物面となるとき，$f(x,y)$ は (a,b) で極大値をとり，

(III) 双曲放物面となるとき，$f(x,y)$ は (a,b) で極大値も極小値もとらない

ということになる．(※放物柱面となる場合は，テイラー展開の 3 次以上の項が極値問題に関係してくるので，この場合は 2 次形式の議論だけでは判定できない．)(8.2) の右辺の二次形式に対応する実対称行列は

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) \end{pmatrix}$$

であり，1/2 を除いた

$$H(a,b) := \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) \end{pmatrix}$$

を f の (a,b) における**ヘッセ行列 (Hessian)** という．今回学んだことから $\det(H(a,b))$ や $\mathrm{Tr}(H(a,b))$ の値を計算することによって，極値問題が解けることがわかるのである．

例 5. $f(x,y) = x^3 - 3xy + y^3$ の極値を求めてみよう．まず

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b) = 3a^2 - 3b = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b) = -3a + 3b^2 = 0 \end{cases}$$

となる点 (a,b) を求める．1 つめの式より，$b = a^2$ なので，2 つめの式に代入して，$0 = -3a + 3a^4 = 3a(a-1)(a^2+a+1)$．よってこの実数解は $a = 0, 1$．これより，上式を満たす点は $(0,0)$ と $(1,1)$ である．さらに，

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 6x \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -3 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 6y$$

より，ヘッセ行列 $H(x,y)$ は

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}$$

となる．これより，

$$\det(H(0,0)) = 0^2 - (-3)^2 = 9 < 0, \quad \det(H(1,1)) = 6^2 - (-3)^2 = 27 > 0, \quad \mathrm{Tr}(H(1,1)) = 6 + 6 = 12 > 0$$

となるので，$f(x,y)$ は点 $(1,1)$ で極小値 $f(1,1) = -1$ を持つ．(点 $(0,0)$ では極大値も極小値も取らない (鞍点)．)