線形代数 II 第 10 回講義資料

担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)*

以下では $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ とする．

第 9 回講義資料 9.1 節の導入部分では “空間” と “座標” を分けて考えるというアイデアを紹介し，“(まっすぐな) 空間” の定式化として『$\mathbb{K}$ 上のベクトル空間』を導入した．今回は “座標” の方の一般化である『基底』について解説する．$\mathbb{K}^n$ の基底については第 5 回講義資料 5.1 節 (定義 5.2) で扱った通りであり，今回はそれを一般のベクトル空間の基底に一般化する．一般化と言っても難しいことはなく，定義は $\mathbb{K}^n$ の場合の $\mathbb{K}^n$ を一般の $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間 V に置き換えるだけである．

10.1 ベクトル空間の基底

基底を定義するにあたって，まずは $\mathbb{K}^n$ のとき (定義 5.2) のように一次独立と生成という概念を準備する．いずれも以前 $\mathbb{K}^n$ としていたところを一般の $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間 V に置き換えるだけである．

定義 10.1

V を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とする．V の元の組 $\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_k$ が**一次独立** (または**線形独立**) であるとは，

$$c_1\boldsymbol{b}_1 + \cdots + c_k\boldsymbol{b}_k = \mathbf{0},\ c_1, \dots, c_k \in \mathbb{K} \ \Rightarrow\ c_1 = \cdots = c_k = 0$$

が成立することを言う．$\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_k$ が一次独立でないとき，$\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_k$ は**一次従属** (または**線形従属**) であるという．

また，V の (有限集合とは限らない) 部分集合 B が**一次独立**であるとは，B の任意の有限部分集合 $\{\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_k\} \subset B$ が上の意味で一次独立な集合となることをいう．

以下は定義からほぼ明らかである．

命題 10.2

V を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とし，B を V の一次独立な部分集合とする．このとき，B の任意の部分集合 $B' \subset B$ は再び一次独立な部分集合となる．

例 1. $V = \mathbb{K}^n$ の場合は，ここでの一次独立性は定義 4.2 で学んだ $\mathbb{K}^n$ における一次独立性と全く同じものである．この場合の例については第 4 回講義資料の例 1〜6 を復習していただきたい．

例 2. $V = \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{K})$ とする (第 9 回講義資料例 3)．このとき，

$$E \coloneqq \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ F \coloneqq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ H \coloneqq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

とおくと*1，

$$B \coloneqq \{I_2,\ E,\ F,\ H\}$$

は $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{K})$ において一次独立であることが以下のように確かめられる．ある $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{K}$ が存在して，

$$c_1 I_2 + c_2 E + c_3 F + c_4 H = \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

* *e-mail*: hoya@shibaura-it.ac.jp

*1 これらを E, F, H と書くのは Lie 環論という分野でよくこの記号が使われるためである．あまり気にしないでいただきたいが，興味のある方は是非『Lie 環，$\mathfrak{sl}_2$』というキーワードで調べてもらいたい (私 (大矢) の専門分野です)．

になったと仮定する ($\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{K})$ における $\mathbf{0}$ は零行列であったことに注意する)．このとき，左辺の行列は具体的に書くと

$$\begin{pmatrix} c_1+c_4 & c_2 \\ c_3 & c_1-c_4 \end{pmatrix}$$

となるので，上の等式が成立するとき，

$$\begin{cases} c_1+c_4=0 \\ c_2=0 \\ c_3=0 \\ c_1-c_4=0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad c_1=c_2=c_3=c_4=0$$

となる．よって，B は一次独立である．

例 3. $V=\mathbb{K}[x]$ とする (第 9 回講義資料例 2)．このとき，

$$B_1 \coloneqq \{1, x, x^2\}$$

は $\mathbb{K}[x]$ において一次独立であることが以下のように確かめられる．ある $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{K}$ が存在して，

$$c_1 + c_2 x + c_3 x^2 = \mathbf{0} = 0$$

になったと仮定する ($\mathbb{K}[x]$ における $\mathbf{0}$ は零行列 0 であったことに注意する)．このとき，$c_1=c_2=c_3=0$ である．よって，B_1 は一次独立である．

B_1 は最も標準的な一次独立な集合であるが，もちろんもっと複雑な例も考えることができる．

$$B_2 \coloneqq \{-3+2x+2x^2, x-x^2, -1+x-x^2\}$$

は $\mathbb{K}[x]$ において一次独立であることが以下のように確かめられる．ある $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{K}$ が存在して，

$$c_1(-3+2x+2x^2)+c_2(x-x^2)+c_3(-1+x-x^2)=\mathbf{0}=0$$

となったと仮定する．上式を整理すると

$$(-3c_1-c_3)+(2c_1+c_2+c_3)x+(2c_1-c_2-c_3)x^2=0$$

となる．このとき，

$$\begin{cases} -3c_1-c_3=0 \\ 2c_1+c_2+c_3=0 \\ 2c_1-c_2-c_3=0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となるので，この連立一次方程式が唯一の解として $c_1=c_2=c_3=0$ を持つことを示せばよい．いま，

$$\left|\begin{pmatrix} -3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}\right| = 4 \neq 0$$

より，この連立一次方程式は係数行列が正則なので，唯一つの解

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を持つ．よって，B_2 は一次独立である．

一次従属な例も見ておこう．

$$X \coloneqq \{-1+x^2, -2+2x+2x^2, -x\}$$

とすると，X は $\mathbb{K}[x]$ において一次従属である．ある $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{K}$ が存在して，

$$c_1(-1+x^2)+c_2(-2+2x+2x^2)+c_3(-x)=\mathbf{0}=0$$

となったと仮定する．上式を整理すると，

$$(-c_1 - 2c_2) + (2c_2 - c_3)x + (c_1 + 2c_2)x^2 = 0$$

となる．このとき，

$$\begin{cases} -c_1 - 2c_2 = 0 \\ 2c_2 - c_3 = 0 \\ c_1 + 2c_2 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} c_1 + 2c_2 = 0 \\ 2c_2 - c_3 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} c_1 = -2c_2 \\ c_3 = 2c_2 \end{cases}$$

となるので，例えば $c_1 = -2, c_2 = 1, c_3 = 2$ とすると，上式が成立する．よって，X は一次従属となる．

例 4. $V = C^\infty(\mathbb{R})$ とする (第 9 回講義資料例 12)．このとき，

$$B \coloneqq \{\sin x, \cos x\}$$

は $C^0(\mathbb{R})$ において一次独立であることが以下のように確かめられる．ある $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ が存在して，

$$c_1 \sin x + c_2 \cos x = \mathbf{0} = 0$$

となったと仮定する ($C^\infty(\mathbb{R})$ における $\mathbf{0}$ は定数関数 0 であったことに注意する)．上式は $\mathbb{R}$ 上の関数としての等式なので，x に任意の実数を代入しても等式が成立する．$x = 0$ とすると，

$$c_1 \sin 0 + c_2 \cos 0 = 0$$

なので，$c_2 = 0$ である．$x = \pi/2$ とすると，

$$c_1 \sin(\pi/2) + c_2 \cos(\pi/2) = 0$$

なので，$c_1 = 0$ である．よって，$c_1 = c_2 = 0$ となるので，B は一次独立である．

例 5. 無限個の元からなる一次独立な集合も見ておこう．$V = \mathbb{K}[x]$ とする．このとき，

$$B \coloneqq \{x^n \mid n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\} = \{1, x, x^2, x^3, \ldots\}$$

は $\mathbb{K}[x]$ において一次独立であることが以下のように確かめられる．任意の B の有限部分集合

$$\{x^{n_1}, x^{n_2}, \ldots, x^{n_k}\} \subset B$$

をとると，これは例 3 の B_1 と同じように一次独立な集合であることがわかる．よって，B は一次独立である．

次に生成という用語を用意しよう，

定義 10.3

V を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とする．V の部分集合 B に対し，B の元の 1 次結合全体からなる集合を $\operatorname{span}_{\mathbb{K}} B$ と書き，これを B によって**生成される** (または**張られる**) 部分空間という．つまり，

$$\operatorname{span}_{\mathbb{K}} B \coloneqq \{c_1 \boldsymbol{b}_1 + \cdots + c_k \boldsymbol{b}_k \mid c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{K}, \boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_k \in B\}$$

とする．定義より，$\operatorname{span}_{\mathbb{K}} B$ は $\mathbf{0}$ を含み，和とスカラー倍で閉じているので，$\operatorname{span}_{\mathbb{K}} B$ は V の部分空間である．

例 6. $V = \mathbb{K}^n$ とする．このとき，

$$\begin{aligned} \operatorname{span}_{\mathbb{K}}\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n\} &= \{c_1 \boldsymbol{e}_1 + c_2 \boldsymbol{e}_2 + \cdots + c_n \boldsymbol{e}_n \mid c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{K}\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \middle| \; c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{K} \right\} = \mathbb{K}^n \end{aligned}$$

である．一般に，$B=\{\boldsymbol{b}_1,\dots,\boldsymbol{b}_n\}$ が $\mathbb{K}^n$ の基底であるとき，

$$\operatorname{span}_{\mathbb{K}} B=\mathbb{K}^n$$

となるのであった ($\mathbb{K}^n$ の基底の定義 5.2 の条件 (2))．

例 7. $\operatorname{span}_{\mathbb{K}} B$ を考えるとき，B は一次独立である必要は無い．例を見てみよう．$V=\mathbb{K}^2$ とする．このとき，

$$\boldsymbol{v}_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_2=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_3=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

とすると，$B=\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3\}$ は一次従属である (第 4 回講義資料例 3)．このとき，

$$\begin{aligned}\operatorname{span}_{\mathbb{K}} B&=\{c_1\boldsymbol{v}_1+c_2\boldsymbol{v}_2+c_3\boldsymbol{v}_3\mid c_1,c_2,c_3\in\mathbb{K}\}\\&=\left\{\begin{pmatrix}c_1+c_2\\c_2+c_3\end{pmatrix}\;\middle|\;c_1,c_2,c_3\in\mathbb{K}\right\}=\mathbb{K}^2\end{aligned}$$

である．このように $\operatorname{span}_{\mathbb{K}} B$ を考える上で B に “余分” にベクトルが入っていることもある．

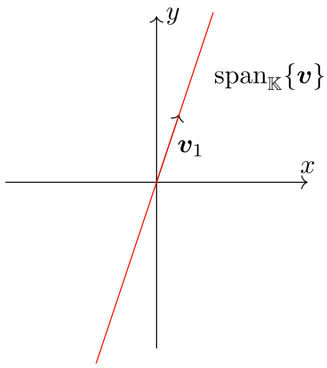
例 8. $V=\mathbb{K}^2$ とする．このとき，

$$\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$$

とすると，

$$\operatorname{span}_{\mathbb{K}}\{\boldsymbol{v}\}=\{c\boldsymbol{v}\mid c\in\mathbb{K}\}=\left\{c\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\;\middle|\;c\in\mathbb{K}\right\}$$

である．図示すると以下のようになっている．



一般に $\mathbb{K}^n$ において，1 元 $\boldsymbol{v}$ で生成される部分空間は原点 $\mathbf{0}$ を通り，方向ベクトルを $\boldsymbol{v}$ とする直線となる．

例 9. $V=\mathrm{Mat}_{2\times2}(\mathbb{K})$ とする．例 2 の記号を再び用いる．このとき，

$$\begin{aligned}\operatorname{span}_{\mathbb{K}} B=\operatorname{span}_{\mathbb{K}}\{I_2,\ E,\ F,\ H\}&=\{c_1I_2+c_2E+c_3F+c_4H\mid c_1,c_2,c_3,c_4\in\mathbb{K}\}\\&=\left\{\begin{pmatrix}c_1+c_4&c_2\\c_3&c_1-c_4\end{pmatrix}\;\middle|\;c_1,c_2,c_3,c_4\in\mathbb{K}\right\}.\end{aligned}$$

となる．ここで，任意の $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in\mathrm{Mat}_{2\times2}(\mathbb{K})$ に対し，

$$c_1=\frac{a+d}{2},\quad c_2=b,\quad c_3=c,\quad c_4=\frac{a-d}{2}$$

とおくと，

$$\begin{pmatrix}c_1+c_4&c_2\\c_3&c_1-c_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$$

とできる．これより $\mathrm{Mat}_{2\times2}(\mathbb{K})$ の任意の元は I_2,E,F,H の一次結合で書けることがわかる．よって，

$$\operatorname{span}_{\mathbb{K}} B=\mathrm{Mat}_{2\times2}(\mathbb{K})$$

である．因みに，

$$B' \coloneqq \{E, F, H\}$$

とすると，

$$\begin{aligned}\operatorname{span}_{\mathbb{K}} B' &= \{c_1 E + c_2 F + c_3 H \mid c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{K}\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} c_3 & c_1 \\ c_2 & -c_3 \end{pmatrix} \,\middle|\, c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{K} \right\} \\ &= \{A \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{K}) \mid \mathrm{Tr}(A) = 0\}\end{aligned}$$

となる．

例 10. $V = \mathbb{K}[x]$ とする．例 3，例 5 の記号を再び用いる．このとき，

$$\operatorname{span}_{\mathbb{K}} B_1 = \operatorname{span}_{\mathbb{K}}\{1, x, x^2\} = \{c_1 + c_2 x + c_3 x^2 \mid c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{K}\} = \mathbb{K}[x]_{\leq 2},$$

となる (第 9 解講義資料例 11 の記号参照)．また，

$$\begin{aligned}\operatorname{span}_{\mathbb{K}} B &= \operatorname{span}_{\mathbb{K}}\{x^n \mid n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\} \\ &= \{c_1 x^{n_1} + \cdots + c_k x^{n_k} \mid k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{K}, n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\} = \mathbb{K}[x]\end{aligned}$$

となる．

例 11. $V = C^\infty(\mathbb{R})$ とする．このとき，

$$\operatorname{span}_{\mathbb{K}}\{\sin x, \cos x\} = \{c_1 \sin x + c_2 \cos x \mid c_1, c_2 \in \mathbb{K}\}$$

となる．これは $C^\infty(\mathbb{R})$ 内の部分空間

$$\left\{ f(x) \in C^\infty(\mathbb{R}) \,\middle|\, \frac{d^2}{dx^2} f(x) = -f(x) \right\}$$

に一致する (詳細は微積分学に譲る)．この部分空間は微分方程式 $\dfrac{d^2}{dx^2} f(x) = -f(x)$ の解空間ということができる．

それでは以下が一般のベクトル空間の基底の定義である．この定義で V を $\mathbb{K}^n$ とすると，定義 5.2 で学んだ $\mathbb{K}^n$ の基底の定義と同じになることに注意する．

定義 10.4

V を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とする．V の部分集合 B が次の性質 (b1)，(b2) を満たすとき，B を V の**基底** (basis) という．

(b1) B は一次独立である．
(b2) B は V を生成する．つまり．$\operatorname{span}_{\mathbb{K}} B = V$ である．

例 12. 上に述べたように，$V = \mathbb{K}^n$ のときは，ここでの基底は定義 5.2 で学んだ $\mathbb{K}^n$ の基底の定義と全く同じである．$\mathbb{K}^n$ の基底は n 個の一次独立なベクトルということもできたことを思い出しておこう (定義 5.2 下部)．

例 13. 例 2 と例 9 での計算から，$B \coloneqq \{I_2,\ E,\ F,\ H\}$ は $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{K})$ の基底であることがわかる．

例 14. m, n を正の整数とし，E_{ij} を (i, j) 成分が 1，その他の成分が全て 0 の $m \times n$ 行列とする．例えば，$m = 2, n = 3$ のとき，

$$E_{11} \coloneqq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad E_{12} \coloneqq \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad E_{13} \coloneqq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$E_{21} \coloneqq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad E_{22} \coloneqq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad E_{23} \coloneqq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

である．このとき，$\{E_{ij} \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$ は $\mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$ の基底である．証明は容易なので練習問題とする (これは数字の並べ方を四角にしているだけで，実質 $\mathbb{K}^{mn}$ の話と思えば良く，その場合 E_{ij} は単位ベクトルに対応するものである).

例 15. 例 3, 例 10 での計算から，$\{1, x, x^2\}$ は $\mathbb{K}[x]_{\leq 2}$ の基底であることがわかる．より一般に，$\{1, x, \ldots, x^k\}$ は $\mathbb{K}[x]_{\leq k}$ の基底である (考え方は $k = 3$ のときと全く同じである)．また，例 5 での考察を踏まえると，$\{x^n \mid n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ は $\mathbb{K}[x]$ の基底である．

基底があると，第 5 回講義資料 5.1 節での考え方のようにして空間に “座標” を入れることができる．そのことを保証するのが以下の命題である．

命題 10.5

V を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とし，B を V の基底とする．このとき任意の V の元は B の元の一次結合としてただ一通りに表すことができる．

証明. まず，任意の V の元が B の元の一次結合として表すことができるというのは基底の定義条件 (b2) そのものである．よって，後はこの表示が一意的であることを示せばよい．

ある $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_k \in B$($\boldsymbol{b}_i$ らは相異なるとする) と $c_1, \ldots, c_k, c'_1, \ldots, c'_k, \in \mathbb{K}$ が存在し，

$$c_1\boldsymbol{b}_1 + \cdots + c_k\boldsymbol{b}_k = c'_1\boldsymbol{b}_1 + \cdots + c'_k\boldsymbol{b}_k$$

となったと仮定する．このとき，移項して，

$$(c_1 - c'_1)\boldsymbol{b}_1 + \cdots + (c_k - c'_k)\boldsymbol{b}_k = \boldsymbol{0}$$

となるが，B の一次独立性 (b1) により，

$$c_1 - c'_1 = \cdots = c_k - c'_k = 0$$

となる．つまり，

$$c_1 = c'_1,\ c_2 = c'_2, \ldots, c_k = c'_k$$

となる．よって，同じ元を B の元の一次結合として 2 通りに表すことはできないことがわかる． □

この命題は，V の元のすべての元が

$$c_1\boldsymbol{b}_1 + \cdots + c_k\boldsymbol{b}_k$$

という形に1 通りに表せるということを述べている．それはつまり，空間内の各点に対し，$c_1, \ldots, c_k$ という $\boldsymbol{b}_k$ 達の係数がただ 1 通りに定まり，それが V の点を完全に指定しているということである．座標と言うのは “その空間内の各点に数の組を割り当て，それによって空間内の点を指定する” というものだったので，これは座標を与えていることに他ならないのである．この考え方は先の講義で再び詳しく扱うことになる．

最後にベクトル空間の次元について述べておこう．

定義 10.6

n を正の整数又は ∞ とする．$\mathbb{K}$ 上の $\{\boldsymbol{0}\}$ でないベクトル空間 V が n 個の元からなる基底を持つとき，V の**次元** (dimension) が n であるといい，$n = \dim_{\mathbb{K}} V$ (あるいは単に $\dim V$) と書く．また，$V = \{\boldsymbol{0}\}$ のときは，$\dim_{\mathbb{K}} V = 0$ とする．

例 16. n を正の整数とする．$\mathbb{K}^n$ は $B = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ という n 個の元からなる基底を持つため，$\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^n = n$ である．これは直感に合った値であろう．

例 17. m, n を正の整数とする．例 14 で見たように，$\mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$ は mn 個の元からなる基底 $\{E_{ij} \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$ をもつので，$\dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K}) = mn$ である．

例 18. 例 15 で見たように，正の整数 k に対し，$\mathbb{K}[x]_{\leq k}$ は $k+1$ 個の元からなる基底 $\{1, x, \ldots, x^k\}$ を持つので，$\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[x]_{\leq k} = k+1$ である．また，$\mathbb{K}[x]$ は無限個の元からなる基底 $\{x^n \mid n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ をもつので，$\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[x] = \infty$ である．

例 19. 複素数 $\mathbb{C}$ を通常の和と実数倍により，$\mathbb{R}$ 上のベクトル空間とみる．このとき，任意の複素数はある 2 つの実数 $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ を用いて $c_1 + c_2 i$ の形に書ける．つまり，

$$\mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{1, i\} = \mathbb{C}$$

である．さらに，ある実数 $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ に対し，$c_1 + c_2 i = 0$ であるとき，$c_1 = c_2 = 0$ なので，$\{1, i\}$ は $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間 $\mathbb{C}$ において一次独立である．よって，$\mathbb{C}$ を $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間とみたとき，$\{1, i\}$ は基底である．これより，$\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$ である．一方，$\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$ である ($\mathbb{C}^n$ の $n = 1$ のとき)．

ここで注意深い方は，この基底の定義に以下のような疑問をいだくであろう．

(Q1) ベクトル空間の次元はいつでも定まるのか? (特にベクトル空間の基底はいつでも取れるのか?)

(Q2) あるベクトル空間が m 個の元からなる基底と n 個の元からなる基底 ($n \neq m$) を同時に持ってしまうことはないのだろうか?

もし，基底が存在しないベクトル空間があると "次元" の定まらないベクトル空間ができてしまう．$\mathbb{K}^n$ を想像しているうちは『基底がないことなんてないだろう』と思ってしまいそうだが，$C^\infty(\mathbb{R})$ などの大きいベクトル空間を考え始めるといつでも基底が取れるという事実は当たり前ではないということがわかるだろう (全てのなめらかな関数がその部分集合の 1 次結合で書けるというような一次独立な関数の集まりはあるのだろうか?)．また，(Q2) は同時に元の数の異なる基底が複数存在してしまうと "基底の元の数" という次元の定義が破綻してしまうことになる．

実はこれらの心配は無用であるということを以下の定理は保証している．定理 10.7 の証明のためにはいくつか言葉を準備する必要があるが，それをすると講義の本筋から大きく脱線してしまうため，ここでは証明は扱わない．証明においては選択公理と同値であることが知られている『ツォルンの補題』と呼ばれる補題を用いる．『基底　ツォルンの補題』というような検索ワードで検索してみると厳密な証明に当たることができると思われるので，興味のある方は各自自習してもらいたい．定理 10.8 については補足プリントで証明を配布するので，興味のある方は確認してもらいたい．

定理 10.7

$\mathbb{K}$ 上のベクトル空間 V は必ず基底を持つ．

定理 10.8

n を正の整数とする．V を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とする．
このとき，V のある基底が n 個の元からなるとすると，V の任意の基底の元の個数は n 個である．

例 20. 例 13，例 14 で見たように，$\{I_2, E, F, H\}$ も $\{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$ も $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{K})$ の基底であるが，共に元の個数は $2 \times 2 = 4$ である．

次に基底に関する便利な定理を述べる．これらも証明は補足プリントで与える．(2) が命題 5.1，および命題 6.1 の一般のベクトル空間バージョンであることに注意しよう．

定理 10.9

V を $\mathbb{K}$ 上の $\{\mathbf{0}\}$ でない有限次元ベクトル空間とし，その次元を n とする．このとき，以下が成立する：

(1) V の n 個の元 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が $V = \mathrm{span}_{\mathbb{K}}\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ を満たすとき，$\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ は V の基底となる．つまり，一次独立性 (基底の定義 10.4 (b1)) は自動的に満たされる．

(2) $k \leq n$ とし，$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ を一次独立な V の元の組とする．このとき，適切に V の $(n-k)$ 個の元 $\boldsymbol{v}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_n \in V$ が存在して，$\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{v}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ が V の基底となるようにできる．
特に，V の n 個の元 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が一次独立であるとき，$\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ は V の基底となる．つまり，生成性 (基底の定義 10.4 (b2)) が自動的に満たされる．

例 21． $V = \mathbb{K}[x]$ とする．例 3 より，

$$B_2 \coloneqq \{-3 + 2x + 2x^2, x - x^2, -1 + x - x^2\}$$

は $\mathbb{K}[x]$ における一次独立な元であった．ここで，B_2 の元は全て $\mathbb{K}[x]_{\leq 2}$ の元であることに注意すると，B_2 は $\mathbb{K}[x]_{\leq 2}$ の一次独立な 3 つの元であるとも言える．ここで，例 18 より，$\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[x]_{\leq 2} = 3$ だったので，B_2 は 3 次元空間の 3 つの一次独立な元の組である．よって，定理 10.9 (2) より，B_2 は $\mathbb{K}[x]_{\leq 2}$ の基底となる (生成性 (基底の定義 10.4 (b2)) をチェックしなくて良い！)．

最後に，『連立一次方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ を解く』という今まで行ってきた操作が，『$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ で定まる部分空間の基底を求める』という操作に対応していたということを述べて資料を締めくくろう．以下の定理は一般的な記号で書くと非常に複雑に見えるが，要するに『連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ を簡約化を用いて解くと自動的に解空間の基底が得られる』ということを主張している．一般的な記号が混乱する場合には定理の証明の後にある例を先に参照するようにしてほしい．

定理 10.10

A を $\mathbb{K}$ の元を成分とする $m\times n$ 行列とし，$\mathbb{K}^n$ の部分空間

$$W_A := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n \;\middle|\; A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{0} \right\}$$

を考える．A を簡約化したとき，

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 1 & a'_{1k_1+1} & \cdots & a'_{1k_2-1} & 0 & a'_{1k_2+1} & \cdots & a'_{1k_3-1} & 0 & a'_{1k_3+1} & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & a'_{2k_2+1} & \cdots & a'_{2k_3-1} & 0 & a'_{2k_3+1} & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & a'_{3k_3+1} & \cdots \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

という形になったとする．つまり，第 k_i 列に i 行目の 1 が入るようにできたとする．また，$\operatorname{rank} A = r$(簡約階段行列の段の数) とする．このとき，各 $i=0,1,\dots,r$ と $k_i<\ell<k_{i+1}$ (ただし，$k_0=0, k_{r+1}=n+1$ とする) に対し，$\boldsymbol{p}_\ell = \begin{pmatrix} p_{1\ell} \\ \vdots \\ p_{n\ell} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ を

$$p_{s\ell} = \begin{cases} -a'_{t\ell} & s=k_t, t=1,\dots,i \text{ のとき} \\ 1 & s=\ell \text{のとき}, \\ 0 & \text{その他のとき} \end{cases}$$

とする．このとき，

$$\begin{aligned} B_A &= \{\boldsymbol{p}_\ell \mid k_i<\ell<k_{i+1}, i=0,1,\dots,r\} \\ &= \{\boldsymbol{p}_1,\dots,\boldsymbol{p}_{k_1-1},\boldsymbol{p}_{k_1+1},\dots,\boldsymbol{p}_{k_2-1},\boldsymbol{p}_{k_2+1},\dots,\boldsymbol{p}_{k_3-1},\boldsymbol{p}_{k_3+1},\dots\} \end{aligned}$$

は W_A の基底である．特に，B_A の元の個数は $n-r=n-\operatorname{rank} A$ であり，

$$\dim_{\mathbb{K}} W_A = n - \operatorname{rank} A$$

である．

証明． 連立一次方程式 $A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}$ の解は B_A の元の一次結合で表されるもので全てであるということは線形代数 I の講義で学習済みである．この事実は今回学んだ用語を用いると，

$$\operatorname{span}_{\mathbb{K}} B_A = W_A$$

ということに他ならない．よって，あとは B_A が一次独立な集合であることを示せば良い．ある $c_\ell \in \mathbb{K}$ $(k_i<\ell<k_{i+1}, i=0,1,\dots,r)$ が存在して，

$$\boldsymbol{0} = \sum_{k_i<\ell<k_{i+1}, i=0,1,\dots,r} c_\ell \boldsymbol{p}_\ell = c_1\boldsymbol{p}_1 + \cdots + c_{k_1-1}\boldsymbol{p}_{k_1-1} + c_{k_1+1}\boldsymbol{p}_{k_1+1} + \cdots + c_{k_2-1}\boldsymbol{p}_{k_2-1} + c_{k_2+1}\boldsymbol{p}_{k_2+1} + \cdots$$

となると仮定する．各 $k_i<\ell<k_{i+1}, i=0,1,\dots,r$ に対し，右辺の元の第 ℓ 成分を考える．いま B_A の元のうち第 ℓ 成分に 0 でない成分があるベクトルは $\boldsymbol{p}_\ell$ だけであるということに注意すると，右辺の一次結合の第 ℓ

成分は c_ℓ である．よって，上式が成立するとき，すべての $k_i < \ell < k_{i+1}, i = 0, 1, \dots, r$ に対し，

$$c_\ell = 0$$

となることがわかる．よって，B_A は一次独立である． □

この定理 10.10 に現れた $n - \operatorname{rank} A$ という値は，連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解の自由度 (解に現れる必要最小限のパラメータの数) に他ならなかった (第 1 回本レポート課題解答問題 7 補足解説参照)．よって，解の自由度とは『$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解空間のベクトル空間としての次元』という言葉で表すことができる．

例 22.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & 2 & 4 & -1 \\ -2 & -4 & 2 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

として，$\mathbb{K}^5$ の部分空間

$$W_A := \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^5 \;\middle|\; A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \right\}$$

を考える．ここで A を簡約化すると，

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる (定理 10.10 の記号で $k_1 = 1, k_2 = 3, k_3 = 5$)．これより，$\operatorname{rank} A = 3$ である．さて，

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \boldsymbol{0} \quad \Leftrightarrow \quad A' \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \boldsymbol{0} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_4 = 0 \\ x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_5 = 0 \end{cases}$$

であるので，左の連立一次方程式を解くためには右の連立一次方程式を解けば良い．このとき，

$$\boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{p}_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

とすると (この $\boldsymbol{p}_\ell$ の記号は定理 10.10 の記号と整合している)，この解 $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$ は一般に

$$\boldsymbol{x} = c_2\boldsymbol{p}_2 + c_4\boldsymbol{p}_4,\ c_1, c_2 \in \mathbb{K}$$

と書ける．つまり

$$W_A = \{c_2\boldsymbol{p}_2 + c_4\boldsymbol{p}_4 \mid c_1, c_2 \in \mathbb{K}\} = \operatorname{span}_{\mathbb{K}}\{\boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_4\}$$

である．ここで，

$$c_2\boldsymbol{p}_2 + c_4\boldsymbol{p}_4 = \begin{pmatrix} -2c_2 - 2c_4 \\ c_2 \\ -3c_4 \\ c_4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

であるので，$c_2\boldsymbol{p}_2 + c_4\boldsymbol{p}_4 = \boldsymbol{0}$ であるときこのベクトルの第 2，第 4 成分に着目すると，$c_2 = c_4 = 0$ であることがわかる．よって，$\{\boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_4\}$ は一次独立であり，W_A の基底である．この議論を一般的に書いているのが定理 10.10 の証明である．